第1卷 第4期
1984年10月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.1, No.4
October, 1984

关于微分包含式最佳控制问题的充分条件

张学铭　　邵　剑

（浙江大学）

摘　要

本文综述了近几年来关于集中参数控制系统更广泛的类型，所谓微分包含式的最佳控制问题的充分条件。这些结果可以认为是最佳控制过程数学理论方面的一个重要进展。

一、引　言

自本世纪五十年代末，Л. С. Понтрягин 建立了最大原则，R. Bellman 建立了动态规划方程，集中参数系统的最佳控制过程数学理论便奠定了理论基础。同时，在实际问题的解决中，显示出它的符合实际的效用。因此，在六十年代一开始便有像 А. Г. Бутковский 和 J. L. Lions 等人将上述理论向分布参数系统的控制过程理论加以推广，并取得了重要的进展。但是，除了线性系统中最大原则和动态规划方程具有充要条件性质外，在非线性系统中，它仅是一必要条件。这种情况当然总使人感到不满足的。

近十年来，В. И. Благодатских 等对于集中参数系统更广泛的类型，所谓微分包含式，讨论了最佳控制的充分条件，得到非常好的结果[1~4]。似乎可以认为他们的工作是最佳控制过程数学理论方面的一个重要进展。因此，我们觉得将这方面的工作综合地加以叙述并向有兴趣的读者们推荐，可能是有益的。下面将分几个部分予以阐述。

二、预 备 事 项

本节将列出有关的基本概念和预备事项。

记 n 维欧几里得空间为 E^n，其状态变量为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$。设 $P(E^n)$ 是空间 E^n 的所有非空子集的集合。

2.1　微分包含式

考虑由给定的多值映射

$$F: E^1\times E^n \longrightarrow P(E^n) \tag{2.1}$$

本文于1983年10月11日收到。

所描写的微分包含式

$$\dot{x}\in F(t,\ x). \tag{2.2}$$

定义 2.1　如果绝对连续函数 $x(t)$ 在区间〔t_0，t_1〕上几乎处处使微分包含式

$$\dot{x}(t)\in F(t,\ x(t))$$

成立，那么称绝对连续函数 $x(t)$ 是（2.2）在〔t_0，t_1〕上的解．

定义 2.2　微分包含式（2.2）的解 $x(t)$ 在〔t_0，t_1〕上是容许的，如果对给定的多值映射

$$X: E^1\longrightarrow P(E^n) \tag{2.3}$$

和区间〔t_0，t_1〕上的所有 t，满足状态约束

$$x(t)\in X(t). \tag{2.4}$$

定义 2.3　令 M_0、$M_1\in P(E^n)$ 分别是给定的初始和终端状态集合．如果微分包含式（2.2）的解 $x(t)$，$t_0\leq t\leq t_1$，满足条件

$$x(t_0)\in M_0,\qquad x(t_1)\in M_1, \tag{2.5}$$

那末就称微分包含式（2.2）的解 $x(t)$ 在区间〔t_0，t_1〕上把状态初始集合 M_0 转移到终端集合 M_1．

方便起见，可以认为初始瞬时 t_0 固定．

2.2　支撑函数及其凸性

定义 2.4　设 $F\in P(E^n)$是任一非空集合，定义支撑函数 $c(F,\ \cdot): E^n\longrightarrow E^1$ 为

$$c(F,\ \phi)=\sup_{f\in F}(f,\ \phi), \tag{2.6}$$

其中 n 维向量 $\phi\in E^n$．

如果定义 2.4 中集合 F 就是微分包含式（2.2）的多值映射 $F(t,\ x)$，便称 $c(F,\phi)$ 为微分包含式（2.2）的支撑函数．特别，当研究以微分方程组

$$\dot{x}=f(x,\ u),\ u\in U$$

来描述客体运动规律的经典问题时，则支撑函数的形式为：

$$c(x,\ \phi)=\max_{u\in U}(f(x,\ u),\ \phi).$$

如果对某一向量 $\phi_0\in E^n$，关系式 $(f_0,\ \phi_0)=c(F,\ \phi_0)$，$f_0\in F$，成立，那末说向量 ϕ_0 是集合 F 在点 f_0 的支撑向量．而由 $(x-f_0,\ \phi_0)=0$，即

$$(x,\ \phi_0)=c(F,\ \phi_0) \tag{2.7}$$

定义的超平面将称作集合 F 在 $f_0\in F$ 的支撑超平面．显然，对任一向量 $f\in F$有

$$(f-f_0,\ \phi_0)\leq 0,$$

且不等式

$$(f,\ \phi)\leq c(F,\ \phi) \tag{2.8}$$

对一切向量 $\phi\in E^n$ 都成立．另一方面，若存在一向量ϕ 使得 $(f,\phi)>c(F,\phi)$，则 $f\notin F$．

从（2.6）式可知，支撑函数 $c(F,\ \phi)$ 由已知集合 F 唯一确定．反之，若知道支撑函数 $c(F,\ \phi)$，则可得集合 F 的凸包：

$$\mathrm{conv}F = \bigcap_{\phi \in E^n} \{ g : (g, \phi) \le c(F, \phi) \} .$$

下面将给出支撑函数 $c(F(t, x), \phi)$ 的凸性定义.

定义 2.5　如果对任一向量 $\phi \in E^n$，任意两点 x^1，$x^2 \in M \subset E^n$，以及任意正实数α、β，$\alpha + \beta = 1$，不等式

$$\alpha c(F(t, x^1), \phi) + \beta c(F(t, x^2), \phi) \le c(F(t, \alpha x^1 + \beta x^2), \phi) \tag{2.9}$$

成立，那么称微分包含式（2.2）的支撑函数 $c(F(t, x), \phi)$在集合 M 上关于 x 是凹的.

假定支撑函数 $c(F(t, x), \phi)$ 在集合 M 上关于 x 连续可微，那么凹性条件（2.9）等价于[6]

$$\left(\frac{\partial c(F(t, x^1), \phi)}{\partial x}, x^2 - x^1 \right) \ge c(F(t, x^2), \phi) - c(F(t, x^1), \phi). \tag{2.10}$$

若对任一 $x \in E^n$ 满足条件

$$\left(\frac{\partial c(F(t, x_0), \phi_0)}{\partial x}, x - x_0 \right) \ge c(F(t, x), \phi_0) - c(F(t, x_0), \phi_0), \tag{2.11}$$

则支撑函数 $c(F(t, x)\phi)$ 沿方向 ϕ_0 在点 x_0 关于 x 为凹的.

如果支撑函数 $c(F(t, x), \phi)$关于 x 为凹的，那么称 $-c(F(t, x), \phi)$ 关于 x 是凸函数.

2.3　若干引理

若$P(E^n)$ 是E^n 的所有非空紧子集的全体，则在其上定义豪斯道夫距离

$$\rho(F,G) = \inf \{ d : F \subset S_d(G), G \subset S_d(F), F、G \in P(E^n) \},$$

这里 $S_d(M)$ 表示集合 M 在 E^n 中的 d 邻域.

给定多值映射 $F : E^n \longrightarrow P(E^n)$，它的李普希兹条件是指：对 E^n 中任意两点 x、x'，存 $k > 0$，使 $F(x)$ 和 $F(x')$的豪斯道夫距离满足

$$\rho(F(x), F(x')) \le k \| x - x' \|.$$

下面考虑微分包含式

$$\dot{x} \in F(x). \tag{2.12}$$

为了方便，把支撑函数 $c(F(x), \phi)$ 简记为 $c(x, \phi)$. 再注意到支撑函数和凸包 $\mathrm{conv}F$ 的定义，容易得到如下结论.

引理 2.1　若映射 $F: E^n \longrightarrow P(E^n)$满足李普希兹条件，则对每一确定的向量 $\phi \in E^n$，支撑函数 $c(x, \phi)$ 关于 x 满足李普希兹条件；反之，若支撑函数 $c(x, \phi)$ 关于 x 满足李普希兹条件，则对应的映射 $\mathrm{conv}F : x \longrightarrow \mathrm{conv}F(x)$ 也满足李普希兹条件.

如果注意到（2.8)及从微分包含式的解和凸包 $\mathrm{conv}F(x)$ 的定义，可直接推得：

引理 2.2　若绝对连续函数 $x(t)$，$0 \le t \le T$，是微分包含式（2.12）的解，则对任一向量 $\phi \in E^n$ 在〔$0, T$〕上几乎处处使不等式

$$(\dot{x}(t), \phi) \le c(x(t), \phi) \tag{2.13}$$

成立；反之，若对任一向量 $\phi \in E^n$ 关于绝对连续函数 $x(t)$ 的条件（2.13）在〔$0, T$〕上几乎处处成立，则 $x(t)$，$0 \le t \le T$，是微分包含式

$$\dot{x}\in \mathrm{conv}F(x) \tag{2.14}$$

的解.

定义2.6　所有这样的点 $x\in E^n$ 的集合称为微分包含式（2.12）的可达球 Y_T，如果能够在不超过 T 的时间内沿（2.12）的解从它们转移到集合 M_1.

定义2.7　集合 M_1 关于微分包含式（2.12）为强稳定，如果对任一 $\tau>0$，集合 M_1 属于集合 Y_τ 的内部，即 $M_1\subset \mathrm{int}Y_\tau$.

引理2.3　假设集合 M_1 强稳定，且对每一确定的向量 ϕ，支撑函数 $c(x,\phi)$ 关于 x 满足李普希兹条件，那末对任何的 τ_1,τ_2，$0\le\tau_1<\tau_2$，有

$$Y_{\tau 1}\subset \mathrm{int}Y_{\tau 2}.$$

证　设 $x_0\in Y_{\tau_1}$，$x(t)$ 是微分包含式（2.12）的解. 按定义2.6，解 $x(t)$ 在时间 $\le\tau_1$ 内把点 x_0 转移到集合 M_1，即 $x(0)=x_0$，$x(\tau)\in M_1$.

因为集合 M_1 强稳定，$\tau_2-\tau>0$，所以 $M_1\subset \mathrm{int}Y_{\tau_2-\tau}$，从而 $x(\tau)\in \mathrm{int}Y_{\tau_2-\tau}$. 这表示存在 $\varepsilon>0$，有邻域 $S_\varepsilon(x(\tau))\subset Y_{\tau_2-\tau}$.

由于对每一确定的向量 $\phi\in E^n$，支撑函数 $c(x,\phi)$ 关于 x 满足李普希兹条件，据引理2.1，映射 $\mathrm{conv}F(x)$ 也满足李普希兹条件. 故微分包含式（2.14）的解对初始点的连续依赖性定理成立[8]. 于是存在邻域 $U(x_0)$，对任一点 $y_0\in U(x_0)$ 可以求得（2.14）的解 $y(t)$，它以时间 τ 把点 y_0 转移到 $S_{\frac{\varepsilon}{2}}(x(\tau))$，即 $y(\tau)\in S_{\frac{\varepsilon}{2}}(x(\tau))$.

但（2.14）式的任一解能以任何精度近似于（2.12）的解[9]，故得（2.12）的解 $x^*(t)$ 使它具有初始条件 $x^*(0)=y_0$，且 $\|x^*(t)-y(t)\|\le\frac{\varepsilon}{2}$. 此时，$x^*(\tau)\in S_\varepsilon(x(\tau))$，故 $x^*(\tau)\in Y_{\tau_2-\tau}$. 就是说，在不大于 $\tau_2-\tau$ 的时间内从点 $x^*(\tau)$ 转移到集合 M_1. 因而 $y_0\in Y_{\tau 2}$，即 $U(x_0)\subset Y_{\tau 2}$. 所以 $x_0\in \mathrm{int}Y_{\tau 2}$.引理证毕.

支撑函数的凹性条件（2.9）现在简写为

$$\alpha c(x^1,\phi)+\beta c(x^2,\phi)\le c(\alpha x^1+\beta x^2,\phi). \tag{2.15}$$

如果集合 M 为整个空间 E^n，那末可以证明支撑函数 $c(x,\phi)$ 的凹性条件（2.15）等价于映射 $F(x)$ 关于 x 的线性性. 下面容易证明的引理将说明这一点.

引理2.4　如果映射 $F:E^n\longrightarrow P(E^n)$ 对所有的 $x\in E^n$ 都有定义，（2.12）的支撑函数 $c(x,\phi)$ 在全空间 E^n 中关于 x 连续可微且为凹的，那么

$$F(x)=Ax+F(0),$$

其中　A 是某一 $n\times n$ 阶矩阵.

三、微分包含式 $\dot{x}\in F(x)$ 的快速控制问题

本节仍考虑微分包含式

$$\dot{x}\in F(x), \tag{3.1}$$

其中　$F:E^n\longrightarrow P(E^n)$ 是一给定的映射. 它的快速控制问题就是：求最佳解 $x(t)$，它

以最少时间自集合 M_0 转移到集合 M_1。

将（3.1）的支撑函数简记为 $c(x,\phi)$，此时，支撑函数沿方向 ϕ_0 在点 x_0 关于 x 的凹向条件（2.11）改为

$$\left(\frac{\partial c(x_0,\phi_0)}{\partial x},\ x-x_0\right)\geq c(x,\phi_0)-c(x_0,\phi_0). \tag{3.2}$$

3.1　定理与证明

微分包含式（3.1）的快速控制问题的充分条件为下面的定理。

定理 1　假设 M_0、M_1 是 E^n 上非空闭集合；微分包含式（3.1）的解 $x(t)$，$t\in[0,T]$，自集合 M_0 转移到集合 M_1；（3.1）式的支撑函数 $c(x,\phi)$ 关于 x 连续可微；存在伴随方程组

$$\dot{\phi}=-\frac{\partial c(x(t),\phi)}{\partial x} \tag{3.3}$$

的非零解 $\phi(t)=(\phi_1(t),\cdots,\ \phi_n(t))$，它们满足以下条件：

a）　在 $[0,T]$ 上几乎处处满足最大条件：

$$(\dot{x}(t),\ \phi(t))=c(x(t),\ \phi(t)); \tag{3.4}$$

b）　在集合 M_0 上的斜截条件：$\phi(0)$ 是集合 M_0 在点 $x(0)$ 的支撑向量，即

$$c(M_0,\phi(0))=(x(0),\phi(0)); \tag{3.5}$$

c）　在集合 M_1 上的斜截条件：$-\phi(T)$ 是集合 M_1 在点 $x(T)$ 的支撑向量，即

$$c(M_1,-\phi(T))=(x(T),-\phi(T)). \tag{3.6}$$

以上诸条件称作最大原则。此外，再假定支撑函数 $c(x,\phi)$ 对一切 $t\in[0,T]$ 沿方向 $\phi(t)$ 在点 $x(t)$ 关于 x 为凹的；解 $x(t)$ 在集合 M_1 上满足强斜截条件，即对一切 $t\in[0,T)$ 满足

$$c(M_1,-\phi(t))<(x(t),-\phi(t)). \tag{3.7}$$

那末解 $x(t)$ 是最佳的。[4]

证　令 $y(t)$ 是定义在 $[0,T]$ 上的微分包含式（3.1）的任意一个解。

首先，在 $[0,T]$ 上几乎处处满足条件

$$\frac{d}{dt}\Big(y(t)-x(t),\ \phi(t)\Big)\leq 0. \tag{3.8}$$

事实上，利用引理 2.2，并注意到定理条件（3.4）和凹性条件（3.2）得

$$\frac{d}{dt}\Big(y(t)-x(t),\phi(t)\Big)=(\dot{y}(t),\ \phi(t))-(\dot{x}(t),\ \phi(t))+(y(t)-x(t),\ \dot{\phi}(t))$$

$$\leq c(y(t),\phi(t))-c(x(t),\phi(t))-\left(\frac{\partial c(x(t),\phi(t))}{\partial x},\ y(t)-x(t)\right)\leq 0.$$

其次，设 Γ_τ，$0\leq\tau\leq T$，是正交于向量 $\phi(\tau)$ 且过点 $x(\tau)$ 超平面，便可以证明在时间 $\theta<T-\tau$ 内不可能把超平面 Γ_τ 转移到集合 M_1。实际上，若 $y(t)$ 满足条件 $y(\tau)\in\Gamma_\tau$，在区间 $[\tau,\tau+\theta]$ 上积分不等式（3.8）得

$$(y(\tau+\theta)-x(\tau+\theta),\ \phi(\tau+\theta))\leq 0.$$

再注意到强斜截条件（3.7），则有

$$\begin{aligned}c(M_1,-\phi(\tau+\theta))&<(x(\tau+\theta),-\phi(\tau+\theta))\\&=(y(\tau+\theta)-x(\tau+\theta),\phi(\tau+\theta))-(y(\tau+\theta),\phi(\tau+\theta))\\&\leq(y(\tau+\theta),-\phi(\tau+\theta)).\end{aligned}$$

依（2.8）可知，点 $y(\tau+\theta)\notin M_1$.

如果点 $y(\tau)$ 满足条件 $(y(\tau)-x(\tau),\phi(\tau))<0$，那末在 $T-\tau$ 内不可能把该点转移到集合 M_1. 这是因为在 $[\tau,T]$ 上积分不等式（3.8）所得不等式

$$(y(T)-x(T),\phi(T))<0$$

违背了 M_1 上斜截条件（3.6）. 由此可见，对一切 $\tau\in[0,T]$，Γ_τ 是可达球 $Y_{t-\tau}$ 在点 $x(\tau)$ 的支撑超平面，$-\phi(\tau)$ 是支撑向量. 特别，Γ_0 是可达球 Y_T 的支撑超平面.

从集合 M_0 的斜截条件（3.5）得出：$M_0\cap Y_T\subset\Gamma_0$，故在时间小于 T 时不可能把集合 M_0 转移到集合 M_1. 此矛盾就证明了解 $x(t)$ 是最佳的. 定理证毕.

满足定理 1 条件的微分包含式（3.1）的解 $x(t)$ 也是微分包含式

$$\dot{x}\in\mathrm{conv}F(x) \tag{3.9}$$

的解. 因此按定理 1，这个解对（3.9）也是最佳的.

推论 若 M_1 是强稳定，支撑函数 $c(x,\phi)$ 在集合 Y_T 上关于 x 为凹的，则把集合 M_0 转移到集合 M_1，并在 $[0,T]$ 上满足定理 1 中最大原则的微分包含式（3.1）的任一解 $x(t)$，$0\leq t\leq T$，是最佳的.

注意到集合 M_1 的强稳定性，即可得强斜截条件（3.7）. 由定理1便可知推论成立.

对满足推论条件的快速控制问题足以找到满足定理 1 的最大原则的解，即使只有一个它也是最佳的. 值得注意的是最佳解可能不唯一. 当已得到一个解 $x(t)$，$0\leq t\leq T$，希望知道它是否是最佳的时候必须验证定理 1 的全部条件，尤其是支撑函数的凹性条件.

3.2 例

研究由方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=\dfrac{1}{2}\left(3-x_1e^{-x_1^2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(3+x_1e^{-x_1^2}\right)u, & u=\pm1,\end{cases} \tag{3.10}$$

描述其状态规律的控制系统. 集合 M_0 由半直线 $x_2=-3$，$x_1\geq 0$ 和 $x_1=0$，$x_2\leq-3$ 组成，集合 M_1 由两点 $\left(\frac{5}{2},\ 3\right)$、$\left(\frac{7}{2},\ 3\right)$ 构成. 现考虑其快速控制问题.

易知，（3.10）的支撑函数为

$$c(x,\phi)=x_2\phi_1+3\frac{\phi_2+|\phi_2|}{2}-x_1e^{-x_1^2}\frac{\phi_2-|\phi_2|}{2},$$

它关于 x 连续可微. 伴随方程组为

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = (1-2x_1^2)e^{-x_1^2}\dfrac{\phi_2-|\phi_2|}{2}, \\ \dot{\phi}_2 = -\phi_1. \end{cases} \tag{3.11}$$

易见，解$x^1(t)=\left(\dfrac{3}{2}t^2-3t+\dfrac{5}{2},\ 3t-3\right)$和$x^2(t)=\left(\dfrac{3}{2}t^2-3t+\dfrac{7}{2},\ 3t-3\right)$，$0\le t\le 2$，把集合$M_0$转移到集合$M_1$。因为点$x^1(0)=\left(\dfrac{5}{2},\ -3\right)$，$x^2(0)=\left(\dfrac{7}{2},\ -3\right)\in M_0$，而点$x^1(2)=\left(\dfrac{5}{2},\ 3\right)$、$x^2(2)=\left(\dfrac{7}{2},\ 3\right)\in M_1$。非零函数$\phi(t)\equiv(0,1)$是伴随方程组（3.11）的解，且和解$x^1(t)$、$x^2(t)$一起满足定理1中的最大条件（3.4）。验证$M_0$、$M_1$的斜截条件（3.5）、（3.6）也不困难。核实支撑函数$c(x,\phi)$沿方向$\phi(t)\equiv(0,1)$在解$x^1(t)$、$x^2(t)$上关于x的凹性条件和M_1的强斜截条件（3.7）也是方便的。因此，这两个解$x^1(t)$、$x^2(t)$满足定理1的所有条件，故为最佳。

如果考察微分包含式$\dot{x}\in F(t,x)$，求它的解$x(t)$以把初态集合M_0转移到末态集合M_1，并使泛函

$$J(x(t))=g(t_1,x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t))dt$$

达到极小的问题，也有类似的最佳控制问题的充分条件的结论[2]。

四、状态受约束下的最佳控制问题

对给定的多值映射（2.1）和（2.3），考察微分包含式

$$\dot{x}\in F(t,\ x), \tag{4.1}$$

而状态是受约束的，即状态$x(t)$满足（2.4）。

状态受约束下的快速控制问题陈述为：寻找微分包含式（4.1）的一个容许解$x(t)\in X(t)$，它以最小时间把状态从集合M_0转移到集合M_1。

令$x(t)$是微分包含式(4.1)在$I=[t_0,t_1]$内的一个容许解。构造伴随函数$\phi:I\longrightarrow E^n$的微分包含式：

$$\dot{\phi}\in G(t,\phi), \tag{4.2}$$

其中　集合$G(t,\ \phi)$由对一切$x\in X(t)$使微分不等式

$$(\dot{\phi},x-x(t))\le c(F(t,x(t)),\phi)-c(F(t,x),\phi) \tag{4.3}$$

成立的所有向量$\dot{\phi}\in E^n$构成。要注意到$G(t,\phi)$与解$x(t)$有关。

4.1　定理与证明

状态受约束下的时间最佳控制问题的充分条件可叙述为下面的定理。

定理 2　设$x(t)$是微分包含式（4.1）的容许解，它在时程I内把状态从集合M_0转移到集合M_1，假定存在一个伴随函数$\phi(t)$，它在I上几乎处处满足微分包含式（4,2），

即对几乎所有的$t\in I$有

$$\dot{\phi}(t)\in G(t,\phi(t)),$$

且可以表示为一个绝对连续函数和一个跳跃函数之和。设函数$\phi(t)$的跳跃点为

$$\tau_i,\quad i=1,2,\cdots,\quad t_0<\tau_i<t_1,$$

而相应的跳跃值是

$$\phi^i=\phi(\tau_i+0)-\phi(\tau_i-0),\quad i=1,2,\cdots.$$

还假定以下条件成立：

1）对几乎所有的$t\in I$，最大条件

$$(\dot{x}(t),\phi(t))=c(F(t,x(t)),\phi(t)) \tag{4.4}$$

成立；

2）集合M_0上斜截条件

$$(x(t_0),\phi(t_0))=c(M_0\cap X(t_0),\phi(t_0)) \tag{4.5}$$

成立；

3）集合M_1上强斜截条件

$$(x(t),-\phi(t))>c(M_1\cap X(t),-\phi(t)) \tag{4.6}$$

对一切$t\in[t_0,t_1)$都成立；

4）跳跃条件

$$(x(\tau_i),\phi^i)=c(X(\tau_i),\phi^i),\quad i=1,2,\cdots, \tag{4.7}$$

成立。那末解$x(t)$是最佳的。

证　设解$x(t)$不是最佳的。则存在一个微分包含式（4.1）的容许解$y(t)$，它在$[t_0,\tau]$上把初始集M_0转移到末端集M_1，其中$\tau<t_1$。显然，

$$y(t_0)\in M_0\cap X(t_0),\quad y(\tau)\in M_1\cap X(\tau).$$

在$[t_0,\tau]$上考虑函数

$$\xi(t)=(y(t)-x(t),\phi(t)). \tag{4.8}$$

由于$y(t)$和$x(t)$是绝对连续函数，$\xi(t)$是一些绝对连续函数和一个跳跃函数之和。因此，对于$\xi(t)$，关系式

$$\xi(\tau)=\xi(t_0)+\int_{t_0}^{\tau}\dot{\xi}(t)dt+\sum_{i:\tau_i\in[t_0,\tau]}(\xi(\tau_i+0)-\xi(\tau_i-0)) \tag{4.9}$$

成立。

利用关系式（4.8）和最大条件（4.4），得关系式

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t)&=(\dot{y}(t),\phi(t))-(\dot{x}(t),\phi(t))+(\dot{\phi}(t),y(t)-x(t))\\&=(\dot{y}(t),\phi(t))-c(F(t,x(t)),\phi(t))+(\dot{\phi}(t),y(t)-x(t))\end{aligned}$$

对于几乎所有的$t\in[t_0,\tau]$成立。伴随函数$\phi(t)$满足（4.2），因此不等式

$$(\dot{\phi}(t),x-x(t))\le c(F(t,x(t)),\phi(t))-c(F(t,x),\phi(t))$$

对几乎所有的$t\in[t_0,\tau]$和所有的向量$x\in X(t)$成立。而解$y(t)$是容许的，即对一切$t\in[t_0,\tau]$有$y(t)\in X(t)$。于是

$$\dot{\xi}(t)\le(\dot{y}(t),\phi(t))-c(F(t,y(t)),\phi(t)).$$

因为 $y(t)$ 是（4.1）的解，包含式

$$\dot{y}(t)\in F(t,y(t))$$

对于几乎所有的 $t\in[t_0,\tau]$ 成立．从而，对几乎所有的 $t\in[t_0,\tau]$ 有 $\dot{\xi}(t)\leq 0$，且

$$\int_{t_0}^{\tau}\dot{\xi}(t)dt\leq 0. \tag{4.10}$$

现计算函数 $\xi(t)$ 在点 τ_i 的跳跃值．利用关系式（4.8）和跳跃条件（4.7）引出：

$$\xi(\tau_i+0)-\xi(\tau_i-0)=(y(\tau_i),\psi^i)-c(X(\tau_i),\psi^i).$$

由于 $y(\tau_i)\in X(\tau_i)$，对任一跳跃点 $\tau_i\in[t_0,\tau]$ 不等式 $\xi(\tau_i+0)\leq 0$ 都成立．$-\xi(\tau_i-0)$ 因此，

$$\sum_{i:\tau_i\in[t_0,\tau]}[\xi(\tau_i+0)-\xi(\tau_i-0)]\leq 0. \tag{4.11}$$

自不等式（4.10）、（4.11）和关系式（4.9）引出不等式

$$\xi(\tau)\leq\xi(t_0).$$

故

$$(y(\tau)-x(\tau),\phi(\tau))\leq(y(t_0)-x(t_0),\phi(t_0)).$$

由集合 M_0 的斜截条件（4.5）和

$$y(t_0)\in M_0\cap X(t_0)$$

的事实给出

$$(y(\tau)-x(\tau),\phi(\tau))\leq(y(t_0),\phi(t_0))-c(M_0\cap X(t_0),\phi(t_0))\leq 0.$$

于是，

$$(y(\tau),-\phi(\tau))\geq(x(\tau),-\phi(\tau)).$$

因为假定 $t_0\leq\tau<t_1$ 上强斜截条件（4.6）成立，便有

$$(x(\tau),-\phi(\tau))>c(M_1\cap X(\tau),-\phi(\tau)).$$

$$\therefore\quad (y(\tau),-\phi(\tau))>c(M_1\cap X(\tau),-\phi(\tau)).$$

这与 $y(\tau)\in M_1\cap X(\tau)$ 相矛盾．此矛盾就证明了本定理．

4.2 例

设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=u,\end{cases} \tag{4.12}$$

其中 控制参数 u 满足 $|u|\leq 1$．假设状态约束为

$$x\in X,\quad X=\{x\in E^2:-1\leq x_2\leq 1\}. \tag{4.13}$$

初始状态和末端状态分别为

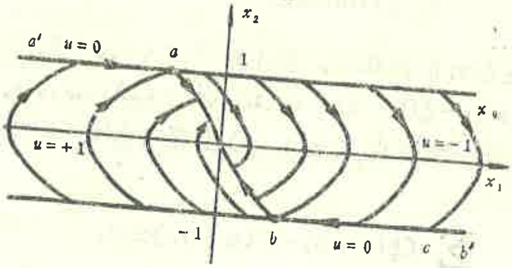
$$x(0)=x_0,\qquad x(t_1)=0,$$

其中 $x_0=(x_1^0,x_2^0)$ 是任一给定的初始点．现考虑它的快速控制问题．

显然，它们的相点 $x(t)$ 如下图运动．取控制函数

$$u(t)=\begin{cases}-1, & \text{点 } x(t) \text{ 位于曲线 } aob \text{ 右方或曲线 } ao \text{ 上},\\ 0, & \text{点 } x(t) \text{ 位于半直线 } aa' \text{ 和 } bb' \text{ 上},\\ +1, & \text{点 } x(t) \text{ 位于曲线 } aob \text{ 左方或曲线 } ob \text{ 上}.\end{cases} \qquad (4.14)$$

对任一给定的初始点 x_0，相应的解 $x(t)$ 沿 $x_0c-cb-bo$ 运动。



方程组（4.12）可以化为微分包含式

$$\dot{x}\in F(t,x),$$

其中 多值函数 $F(t,x)=\{f\in E^2: f_1=x_2,\ |f_2|\leq 1\}$。相应的支撑函数为

$$c(F(t,x),\psi)=x_2\psi_1+|\psi_2|. \qquad (4.15)$$

而不等式（4.3）现为

$$(x_1-x_1(t))\dot{\psi}_1+(x_2-x_2(t))(\dot{\psi}_2+\psi_1)\leq 0, \qquad (4.16)$$

它对所有向量 $x\in X$ 都必成立。对 $|x_2(t)|<1$时的那些时间 t，代替（4.16）有微分方程组

$$\dot{\psi}_1=0, \qquad \dot{\psi}_2+\psi_1=0 .$$

对 $x_2(t)=1$，有微分不等式

$$\dot{\psi}_1=0, \qquad \dot{\psi}_2+\psi_1\geq 0.$$

对 $x_2(t)=-1$，亦有微分不等式

$$\dot{\psi}_1=0, \qquad \dot{\psi}_2+\psi_1\leq 0.$$

从而容易逐条验证定理 2 的条件，故解 $x(t)$是最佳的。

五、讨 论

注意到次微分的定义及微分不等式（4.3）。如果支撑函数 $c(F(t,x),\ \psi)$ 是 x 的凹函数，那么微分包含式（4.2）可以用更强的关系式

$$\dot{\psi}\in\partial_x[-c(F(t,x(t)),\psi)] \qquad (5.1)$$

代替，其中 $\partial_x p(x)$ 表示函数 $p(x)$的次微分。若 $\psi(t)$ 为微分包含式（5.1）的解，则它也是（4.2）的解。如果假设 $c(F(t,x),\psi)$ 关于 x 可微，那么微分包含式（5.1）退化为伴随微分方程

$$\dot{\psi}=-\frac{\partial c(F(t,x(t)),\psi)}{\partial x}. \qquad (5.2)$$

这就是（3.3）式。倘若 $c(F(t,x),\phi)$ 在集合 $X(t)$ 中于点 $x(t)$ 沿方向 $\phi(t)$ 关于 x 为凹的，则（5.2）的任一解 $\phi(t)$ 也是（4.2）的解。

也可以用次微分来研究 $\dot{x}\in F(t,x)$ 的最佳控制问题中的有关条件。

所得出的最佳控制问题的充分条件和其必要条件的区别在于：多值映射 $F(t,x)$ 没有光滑性、致密性等要求。于是就能够把充分条件应用到更大一类控制系统中去，如非光滑右方系统、相约束系统等。

如果支撑函数 $c(F(t,x),\phi)$ 关于 x 连续可微，那么存在伴随系统（5.2）的解 $\phi(t)$，且最大条件和集合 M_0 上斜截条件成立。因而，对于快速控制问题要使其满足最大原则的轨线 $x(t)$ 成为最佳，就应该对最佳性必要条件补充支撑函数 $c(F(t,x),\phi)$ 在集合 $X(t)$ 上于点 $x(t)$ 沿方向 $\phi(t)$ 关于 x 为凹的条件以及集合 M_1 的强斜截条件。

参考文献

〔1〕 Blagodatskikh, V. I., Sufficient Conditions for Optimality in Problems with State Constraints, Appl. Math. Optim., 7 (1981), 149—157.

〔2〕 Благодатских, В. И., К теории достаточных условий оптимальности, Доклады Академии Наук СССР, т. 231, 5(1976), 1041—1044.

〔3〕 Благодатских, В. И., К теории достаточных условий оптимальности, труды математического института АН СССР, т. 142 (1977).

〔4〕 Благодатских, В. И., Достаточные условия оптимальности для дифференциальных включения, Известия Академии Наук СССР, Серия математическая, т. 38, 3 (1974), 615—624.

〔5〕 Благодатских, В. И., Достаточное условие оптимальности, Дифференциальные уравнения, 9, 3 (1973), 416—422.

〔6〕 Ponstein J., Seven Kinds of Convexity, SIAM Review, 9, 1(1967) 115—119.

〔7〕 Благодатских, В. И., О локальной управляемости дифференциальных включений, Дифференциальные уравнения, 9, 2 (1973), 361—362.

〔8〕 Филиппов, А. Ф., Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью, Вестник Московского Университета, Математика, 3 (1967), 16—26.

〔9〕 Hermes H., The generalized differential equation, Adv. in Math., 4, 2 (1970), 149—169.

〔10〕 Болтянский, В. Г., Линейная задача оптимального управления, Дифференциальные уравнения, 5, 3 (1969), 783—799.
〔11〕 Дайовнч, С., К теории оптимальных процессов в линейных системах, Дифференциальные уравнения, 8, 9 (1972), 1687—1690.
〔12〕 Понтрягин, Л. С., ит.п., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва (1961).
〔13〕 Rockafellar, T.R., Convex Analysis, Princeton University Press (1970).
〔14〕 Clarke, F.H., J. Math. Anal. and Appl., 51, 3 (1975), 557.

ON THE SUFFICIENT CONDITIONS OF OPTIMALITY FOR THE DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Zhang Xueming, Shao Jian
(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

This paper summarizes a lot of work of В. И. Благодатских and others on the sufficient conditions of optimality for an extensive class of lumped parameter systems, i. e. the differential inclusions. It seems that this work is an important advance in the mathematical theory of optimal control.