

复杂系统的模型简化

——带偏连分式法的计算及改进

熊光楞 宋安澜

(清华大学)

摘 要

本文探讨了用于模型简化的带偏连分式法,提出了一个带偏连分式展开和反演的具体算法,并根据可调参数法的思路,对带偏连分式法作了进一步改进,改进后的方法逼近精度较好,应用灵活,在频率特性上,既能实现整个频段上有侧重的逼近,又能实现在某些特定频率处较精确的拟合。最后通过例题进行了计算比较。

一、引 言

频域模型简化具有概念直观明确、计算简单灵活、工程上易于被接受等特点,各种频域简化法中,连分式法思路清晰、计算简便、拟合精度较高,深受人们欢迎。关于连分式法的综述性文章可参见文献[1]。

连分式的形式很多,有用于网络理论中的三种 Cauer 型及修正 Cauer 型、带偏连分式和 Jordan 型连分式。在各种连分式法中,我们认为带偏连分式具有应用灵活并可实现有侧重的拟合之优点。实际上,它还包含了第一 Cauer 型、第二 Cauer 型和修正 Cauer 型。

关于连分式法的展开和反演,最直接的就是用辗转相除法展开,截断后再直接反演成有理多项式。到目前为止,对于第一、第二 Cauer 型和修正 Cauer 型等连分式的展开和反演均已有了简便的列表算法^{[1][6]}。但就我们所知,对带偏连分式法还没有一套完整而又简便的展开和反演的算法。这里,我们提出一种便于用计算机实现的重排系数 Routh 算法。

为了改善连分式法的拟合精度及稳定性,文献[5]中提出了带可调参数的连分式法,在第二 Cauer 型连分式的基础上,引入了两个可调参数,再通过简化模型对原型频率特性的拟合,确定可调参数,可调参数的引入,增加了简化方法的灵活性,提高了拟合精度。基于这一思想,我们对带偏连分式法作了改进。

本文介绍了重排系数 Routh 算法和具有可调参数的带偏连分式法, 并通过实例对带偏连分式法及其改进形式作了计算比较。

二、带偏连分式法

连分式降阶实际上是一种有理函数逼近法。

设高阶系统的传递函数为:

$$G(s) = \frac{a_{21} + a_{22}s + \cdots + a_{2,m+1}s^m}{a_{11} + a_{12}s + \cdots + a_{1,n+1}s^n} \quad (m \leq n). \quad (2.1)$$

所谓带偏连分式, 就是先在 $s=0$ 附近展得 $G(s)$ 的 k 个偏系数, 再在 $s=\infty$ 附近展开余下的 $2n-k$ 个偏系数, 展式如下:

$$G(s) = \frac{1}{h_1} + \frac{s}{h_2} + \cdots + \frac{s}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1/s}{h_{k+2}} + \cdots + \frac{1/s}{h_{2n}} \quad (2.2)$$

上式中 k 为偶数。在上式展开后, 将展式中的 $2r$ 个主导的偏系数保留下来, 其余截去, 经反演成为 r 阶简化模型。

在 (2.2) 式中, 令 $k=0$, 有:

$$G(s) = \frac{1}{h_1} + \frac{1/s}{h_2} + \cdots + \frac{1/s}{h_{2n-1}} + \frac{1/s}{h_{2n}} \quad (2.3)$$

这就是第一 Cauchy 型连分式。

在 (2.2) 式中, 令 $k=2n$, 有

$$G(s) = \frac{1}{h_1} + \frac{s}{h_2} + \cdots + \frac{s}{h_{2n-1}} + \frac{s}{h_{2n}} \quad (2.4)$$

这就是第二 Cauchy 型连分式。

还有一种在 $s=0$ 和 $s=\infty$ 交替展开的修正 Cauchy 型:

$$G(s) = \frac{1}{h_1} + \frac{s}{h'_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{s}{h'_2} + \cdots + \frac{1}{h_n} + \frac{s}{h'_n} \quad (2.5)$$

已有人证明^[1], 在 $k=r$ 时, 修正 Cauchy 型与带偏连分式是等价的。

在 $s=0$ 处展开的连分式法具有良好的低频拟合精度, 而在 $s=\infty$ 处展开的连分式法具有良好的高频拟合精度; 带偏连分式法则能根据需要选择 k , 从而实现在不同频段有侧重的拟合, 因此应用灵活。

三、带偏连分式的展开和反演

设高阶传递函数如 (2.1) 式, 展成如下的形式:

$$G(s) = \frac{1}{h_1} + \frac{s}{h_2} + \cdots + \frac{s}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1/s}{h_{k+2}} + \cdots + \frac{1/s}{h_{2n}} \quad (3.1)$$

(其中 k 为偶数),

$$\text{或: } G(s) = \frac{1}{h_1} + \frac{s}{h_2} + \cdots + \frac{s}{h_k} + \frac{s}{h_{k+1}} + \frac{1/s}{h_{k+2}} + \cdots + \frac{1/s}{h_{2n}} \quad (3.2)$$

(其中 k 为奇数).

上面结果可由分段展开而得, 先按第二 Cauey 型展至 h_k :

$$G(s) = \frac{1}{h_1} + \frac{s}{h_2} + \cdots + \frac{s}{h_k + G_1(s)} \quad (3.3)$$

再将 $G_1(s)$ 展成第一 Cauey 型.

具体算法如下:

第一段:

$$\begin{array}{l} h_1 \begin{cases} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & \end{cases} \\ h_2 \begin{cases} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ a_{4,1} & \cdots & \cdots & \end{cases} \\ \vdots \\ h_k \begin{cases} a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,m_1+1} \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \cdots & a_{k+2,m_2+1} \end{cases} \end{array}$$

其中 $a_{j,i} = a_{j-2,i+1} - h_{j-2} a_{j-1,i+1}$,
 $h_j = a_{j,1}/a_{j+1,1}$,

$$j = 3, 4, \cdots, k+2; i = 1, 2, 3, \cdots, n+1 - \text{INT}\left(\frac{j}{2}\right),$$

$$m_1 = n - \text{INT}\left(\frac{k+1}{2}\right),$$

$$m_2 = n - \text{INT}\left(\frac{k}{2} + 1\right).$$

由上表的第 $k+1$ 行和第 $k+2$ 行, 我们得:

$$G_1(s) = \frac{a_{k+2,1} + a_{k+2,2}s + \cdots + a_{k+2,m_2+1}s^{m_2}}{a_{k+1,1} + a_{k+1,2}s + \cdots + a_{k+1,m_1+1}s^{m_1}} \quad (3.4)$$

(其中 k 为偶数),

或:
$$G_1(s) = \frac{a_{k+2,1}s + a_{k+2,2}s^2 + \dots + a_{k+2,m_2+1}s^{m_2+1}}{a_{k+1,1} + a_{k+1,2}s + \dots + a_{k+1,m_1+2}s^{m_1}} \quad (3.5)$$

(其中 k 为奇数)。

为了将 $G(s)$ 展成第一 Cauer 型, 必须将 $G(s)$ 排成 s 的降幂形式, 即作如下变换:

$$a'_{1,i} = a_{k+1, m_1+2-i}, \quad i=1, 2, \dots, m_1+1,$$

$$a'_{2,i} = a_{k+2, m_2+2-i}, \quad i=1, 2, \dots, m_2+1.$$

再利用 $a'_{1,i}$ 和 $a'_{2,i}$ 组成 Routh 表头, 计算如下:

$$\begin{array}{ccccccc} h'_1 & \left\langle \begin{array}{cccccc} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \dots & a'_{1,m_1} & a'_{1,m_1+1} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,m_2} & a'_{2,m_2+1} \end{array} \right\rangle \\ h'_2 & \left\langle \begin{array}{cccc} a'_{3,1} & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\rangle \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h'_{2m_1} & \left\langle \begin{array}{cc} a'_{2m_1,1} & \\ a'_{2m_1+1,1} & \end{array} \right\rangle \end{array}$$

其中 $a'_{ji} = a'_{j-2,i+1} - h'_{j-2} a'_{j-1,i+1},$

$$h'_j = a'_{j,1} / a'_{j+1,1},$$

$$j=3, 4, \dots, 2n-k+1,$$

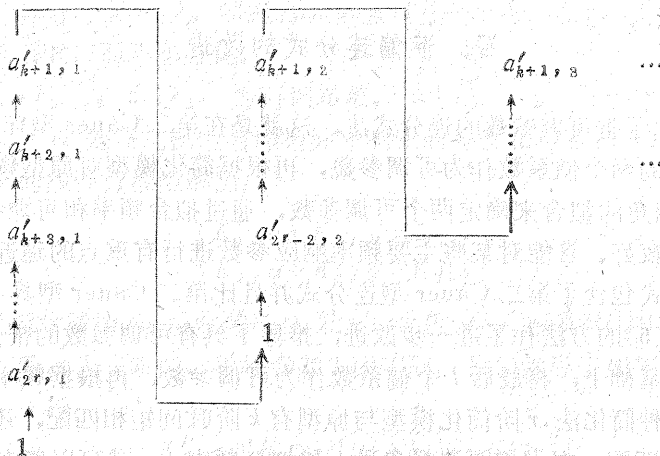
$$i=1, 2, \dots, n+2 - \text{INT}\left(\frac{k+j}{2}\right).$$

再令 $h_{k+j} = h'_j \quad j=1, 2, \dots, 2n-k.$

至此, 我们已求得了全部偏系数, 完成了展开工作. 下面讨论反演问题.

取 r 阶截断, 即保留 $2r$ 个偏系数, 再分两段反演之:

第一段 由 $h_2 \rightarrow h_{k+1}$, 反演如下:



其中 $a'_{ji} = a'_{j+2, i-1} + h_j a'_{j+1, i}$ ($j = 2r, 2r-1, \dots, k+1$),
($i = 1, 2, \dots, m_1+1$).

初始条件: $a'_{j0} = 0$,

$a'_{ji} = 1$, (当 $j+2i = 2r+3$ 时)

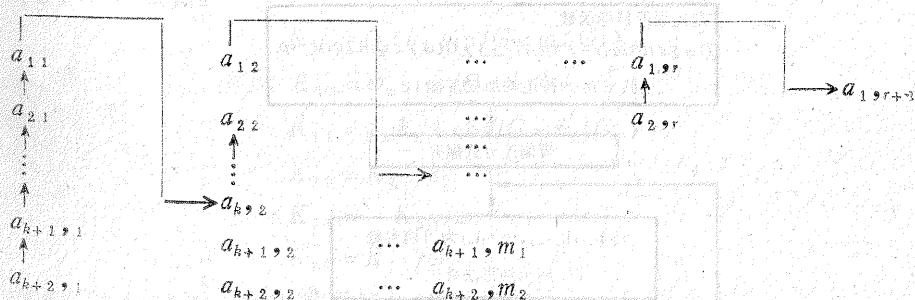
并且: $m_1 = r - \text{INT}\left(\frac{k+1}{2}\right)$, $m_2 = r - \text{INT}\left(\frac{k}{2} + 1\right)$.

第一段完成, 将最上面两行系数重排:

$$a_{k+1, i} = a'_{k+1, m_1+2-i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m_1),$$

$$a_{k+2, i} = a'_{k+2, m_2+2-i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m_2).$$

再用 $a_{k+1, i}$ 和 $a_{k+2, i}$ 组成 Routh 表的最下面两行:



其中

$$a_{ji} = a_{j+2, i-1} + h_j a_{j+1, i},$$

$$a_{j0} = 0,$$

$$j = k, k-1, \dots, 2, 1,$$

$$i = 1, 2, \dots, r, r+1.$$

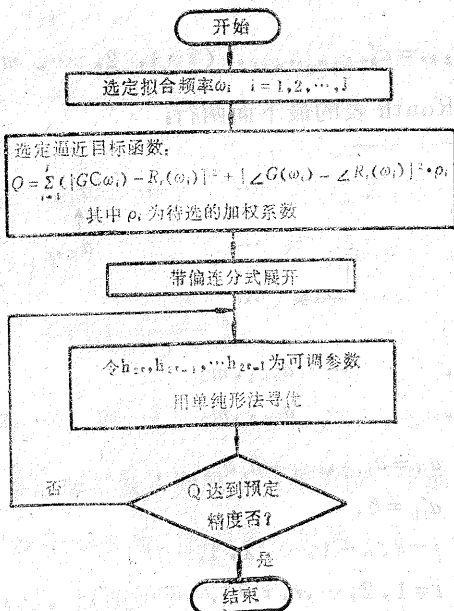
上面 Routh 表中前两行即简化模型的系数。

由于带偏连分式包含了第二 Cauer 型连分式并且比第二 Cauer 型具有更多优点, 因此, 我们对文献[5]的方法作了进一步改进, 推导了具有可调参数的带偏连分式法, 在带偏连分式法的基础上, 将最后 I 个偏系数作为可调参数, 再根据频率特性的拟合来确定可调参数。这种简化法, r 阶简化模型与原型有 k 阶时间矩相匹配, 还有 $(2r-k-1)$ 个 Markov 参数相匹配, 根据需要选择参数 k 和拟合频率 ω_x , 就可以既在整个频段上实现有侧重的拟合, 又在某些重要的频率处简化模型与原型的频率响应非常接近, 与原有方法比较灵活性与拟合精度都有提高。

先将原型 $G(s)$ 展开成带偏连分式 (2.2), 再取 r 阶截断, 有:

取下标最大的 I 个偏系数作为可调参数, 即: 将 $h_{2r}, h_{2r-1}, \dots, h_{2r-I}$ 在原来的值

下面是计算框图:



为了减少计算量,当 $J=1$, 即拟合频率点只有一个时,我们可以直接推导出一套计算低阶模型的公式,而不必寻优。

令 $\alpha = h_{2r} \cdot h_{2r-1}$, $\beta = h_2$ 为可调参数。

再令拟合频率 ω_x 处简化模型与原型频率响应的幅值和相角相等,根据文献[5],可调参数可由下面的线性方程组解出:

$$\begin{cases} K_{11}\alpha + K_{12}\beta = K_{13}, \\ K_{21}\alpha + K_{23}\beta = K_{23}. \end{cases}$$

式中 K_{ij} 是拟合频率 ω_x 及原型在 ω_x 处的相角 $/G$, 幅值 $|G|$ 的函数。

在简化模型阶次为二阶时,根据参数 k 的不同,我们推导了如下公式:

(1) 当 $k=0$ 时:

$$K_{11} = \omega_x h_2 (\sin /G + h_1 \omega_x |G|)$$

$$K_{12} = \cos /G$$

$$K_{21} = \omega_x (h_2 \cos /G - |G|)$$

$$K_{22} = -K_{11}/(\omega_x \cdot h_2)$$

$$K_{13} = -K_{21}/\omega_x$$

$$K_{23} = K_{11}/\omega_x$$

(2) 当 $k=1$ 时:

$$K_{11} = \omega_x (k_2 \sin /G + \omega_x |G|)$$

$$K_{12} = \cos /G - h_1 |G|$$

$$K_{21} = K_{12} \omega_x h_2$$

$$K_{22} = -\sin /G$$

$$K_{13} = -K_{21}/\omega_x$$

$$K_{23} = K_{11}/\omega_x$$

(3) 当 $k=2$ 时:

$$K_{11} = \omega_x (h_2 \sin /G + \omega_x |G|)$$

$$K_{12} = \omega_x \sin /G$$

$$K_{21} = \omega_x h_2 (\cos /G - h_1 |G|)$$

$$K_{22} = K_{21}/h_2$$

$$K_{13} = -K_{21}/\omega_x$$

$$K_{23} = K_{11}/\omega_x$$

当 $k=3$ 、 $k=4$ 时,简化模型与 $k=2$ 时相同。

本法取 $k=2r$, 可调参数取二个时,即成为文献[5]所提出的方法。

五、例题计算与比较

给定 4 阶系统:

$$G(s) = \frac{120 + 90s + 24.8s^2 + 1.4s^3}{12 + 18s + 10.2s^2 + 9s^3 + s^4},$$

谐振频率 $\omega_m = 1.4125$.

二阶简化模型如下:

方 法	k	简 化 模 型	附 注
带 偏 连 分 式 法	0	$R_0(s) = \frac{17.9279 + 1.401s}{-11.2944 + 4.091s + s^2}$	不 稳 定
	1	$R_1(s) = \frac{15.8553 + 1.401s}{1.58553 + 2.6115s + s^2}$	$J = 59.1546$
	2	$R_2(s) = \frac{13.8479 + 1.401s}{1.38479 + 1.1787s + s^2}$	$J = 49.2581$
	3	$R_3(s) = \frac{110.7173 + 1.401s}{11.07173 + 8.4439s + s^2}$	$J = 54.2605$
	4	$R_4(s) = \frac{-2.0968 + 13.559s}{-0.20968 + 1.1987s + s^2}$	不 稳 定
有 带 可 偏 调 连 参 分 数 式 的 法	0	$R_{a0}(s) = \frac{12.5014 + 1.401s}{1.7552 + 0.2175s + s^2}$	$J = 133.5215$
	1	$R_{a1}(s) = \frac{16.8959 + 1.401s}{1.68959 + 0.3014s + s^2}$	$J = 40.8852$
	2	$R_{a2}(s) = \frac{20.6941 - 10.0692s}{2.06941 + 0.5451s + s^2}$	$J = 36.1191$

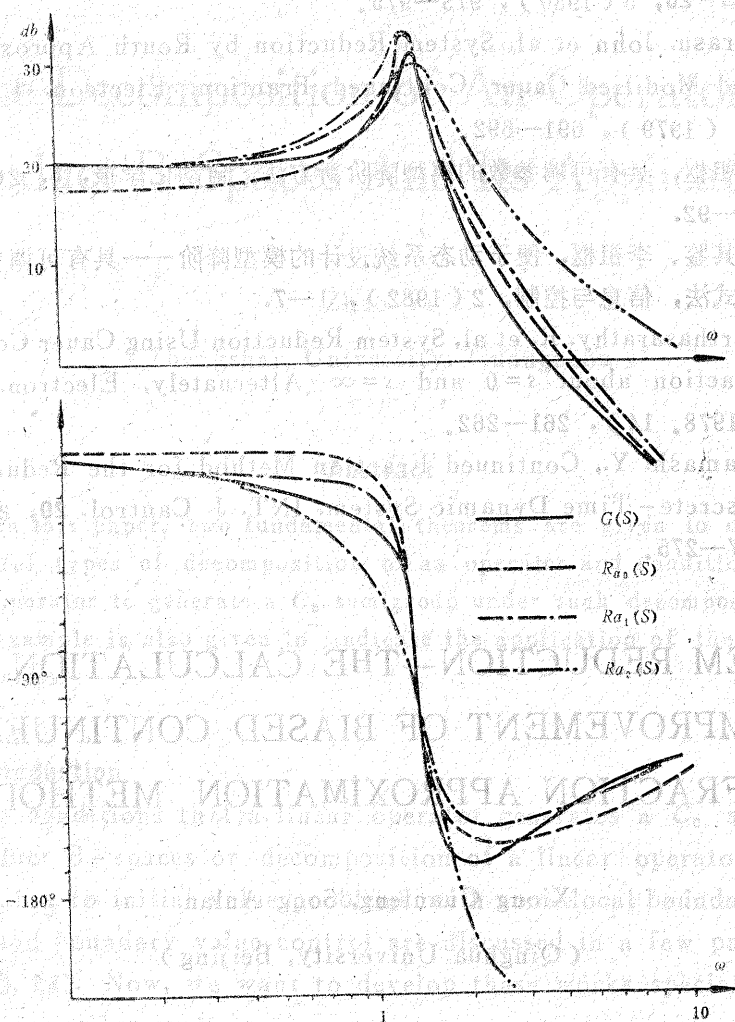
注: (1) $J = \sum_{i=1}^N |y_{Ri} - y_{Gi}| \cdot \Delta T$, 其中: y_G 和 y_R 分别为原型和简化模型的单位阶跃响应, ΔT 为仿真间隔, $N \cdot \Delta T$ 为过渡过程时间.

(2) 带可调参数的带偏连分式法拟合频率为: $\omega_m = 1.4125$.

由上例可见, 参数 k 选择不同, 引出了一组不同的简化模型, 引入可调参数后, 带偏连分式法的拟合精度有所提高. 原型及带可调参数的带偏连分式简化模型的频率响应如图所示. 在图中我们可以清楚地看到: k 的不同, 使简化模型在各频段对原型的逼近也不同, $k=0$ 时低频逼近差而高频好, $k=2$ 时低频逼近好而高频差, $k=1$ 时兼顾了低频和高频. 而在拟合点 $\omega=1.4125$ 处, 简化模型的幅相特性与原型几乎是一样的. 这样, 选不同的 k 值实现了不同频段的有侧重逼近, 而选一定的拟合频率则实现了主要频率点的拟合.

六、结 论

1. 带偏连分式法应用灵活, 逼近精度较好, 利用重排系数 Routh 算法可方便地



原型和简化模型幅频特性及相频特性的比较

用计算机实现展开和反演，便于实际应用。

2. 带可调参数的带偏连分式法既能实现整个频段上有侧重的逼近，又能实现某些重要频率点的拟合，其拟合精度优于原有带偏连分式法，而其灵活性又比原有带可调参数的第二 Cauer 型要好。

参 考 文 献

- [1] 张启人，线性系统频域模型简化的连分式法，信息与控制，3 (1981)，1—11.
- [2] Pal. J., System Reduction by a Mixed Method, IEEE Trans.,

AC-25, 5 (1980), 973—975.

[3] Sarasu. John et al, System Reduction by Routh Approximation and Modified Cauer Continued Fraction, Electron. Lett., 15, 21 (1979), 691—692.

[4] 李祖枢, 具有可调参数的模型降阶新方法, 自动化学报, 8, 2(1982), 81—92.

[5] 周其鉴、李祖枢, 便于动态系统设计的模型降阶——具有可调参数的连分式法, 信息与控制, 2 (1982), 1—7.

[6] Parthasarathy. R. et al, System Reduction Using Cauer Continued Fraction about $s=0$ and $s=\infty$ Alternately, Electron. Lett., (1978, 14), 261—262.

[7] Shamash. Y., Continued Fraction Method for the Reduction of Discrete-Time Dynamic System. INT. J. Control, 20, 2(1974), 267—275.

SYSTEM REDUCTION—THE CALCULATION AND IMPROVEMENT OF BIASED CONTINUED FRACTION APPROXIMATION METHOD

Xiong Guanleng, Song Anlan

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this paper, the biased continued fraction approximation method for system reduction is discussed. Improvement of this method is made. An algorithm for expansion and inversion of the biased continued fraction is proposed. A biased continued fraction method with adjustable parameters which has good approximate solution and flexibility is provided. The reduced model not only approximates with bias the frequency response of the original model, but also provides precise matching at some particular frequencies. An example is given.