第2卷 第1期 控制理论与应用 Vol,2, No.1
1985年1月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS January, 1985

交换环上线性系统的实现问题

李铁钧

（南开大学）

摘　要

本文讨论交换环上线性输入一输出映射的实现问题。首先，引入了新的周期性概念。应用这一概念得到了可实现的充分必要条件。然后，讨论自由规范实现的存在问题。证明了，在主理想整环上必存在自由规范实现。

一、交换环上线性输入一输出映射

设 R 是有单位元素的交换环．R 上离散时间线性系统由如下方程组描述

$$\Sigma:\begin{cases} x(t+1)=Fx(t)+Gu(t), \\ y(t)=Hx(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中　状态 $x\in X$（有限生成R－模），输入 $u\in R^m$，输出 $y\in R^p$．F、G、H 分别是 $X\to X$、$R^m\to X$、$X\to R^p$ 的 R－模同态．系统（1.1）简记为$\Sigma=(X,F,G,H)$．

以 $R[z]$表示系数在 R 中的 z 的多项式构成的 R－模．$R^m[z]$为系数在 R^m 中的 z 的多项式构成的 R－模．$R^m[z]$可自然地赋以 $R[z]$－模结构．不难看出，

$$e_i=(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\(i)}}{1},0\cdots0)^T,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

构成 $R^m[z]$的 $R[z]$－基底（这里"T"表示转置）．

以 $z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$表示系数在 R^p 中的 z^{-1} 无常数项的形式幂级数构成的 R－模．对 $z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$也可赋以 $R[z]$－模结构如下：对任$a(z)=\sum_{s=0}^{l}a_sz^s\in R[z]$，

$y=\sum_{t=1}^{\infty}y_tz^{-t}\in z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$，定义乘积（记为$\odot$）为

$$a(z)\odot y=\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{l}a_sy_{s+t}\right)z^{-t}.$$

本文于1982年12月11日收得，1983年12月6日收到修改稿。

因此，$z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$也是$R[z]$－模。

不难验证，系统（1.1）的输入—输出映射是$R^m[z]$到$z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$的$R[z]$－模同态。由此，有

定义 1.1　映射f：$R^m[z]\to z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$称为$R$上的线性输入—输出映射（以下称为简$I$—$O$映射），如果$f$是$R[z]$－模同态。

显然，f由$f(e_i)$，$i=1,2,\cdots,m$完全决定。

定义 1.2　R上$I-O$映射f称为可实现的，如果存在R上的离散线性系统$\Sigma(X,F,G,H)$以f为其输入—输出映射（注意：这里状态模X必须为有限生成R－模。

定理 1.1　R上$I-O$映射f可实现的充分必要条件是，存在$R[z]$－模X，它做为R－模是有限生成的，以及$R[z]$－模同态g,h,使得下面可交换：

$$
\begin{tikzcd}
R^m[z] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & z^{-1}R^p[[z^{-1}]] \\
& X \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
\tag{1.3}
$$

证　若f可实现，则有R上的线性系统$\Sigma=(X,F,G,H)$以f为输入—输出映射(其中X是有限生成R－模)。利用F可对X赋以$R[z]$－模结构：对任$a(z)\in R[z]$,$x\in X$,定义$a(z)\odot x=a(F)x$。再分别用G,H定义g,h为

$$g:\ R^m[z]\longrightarrow X:\quad \sum_{k=1}^{m}u_k(z)e_k\longmapsto\sum_{k=1}^{m}u_k(z)Ge_k,$$

$$h:\ X\longrightarrow z^{-1}R^p[[z^{-1}]]:\quad x\longmapsto(Hx,\ HFx,\ HF^2x,\cdots).$$

不难验证,g,h都是$R[z]$－模同态且$f=hg$。

反之，如果有分解（1.3），则可定义R－模同态F，G，H为：

$$F:\ \longrightarrow X:\qquad x\longmapsto zx,$$

$$G:\ R^m\longrightarrow X:\qquad e_k\longmapsto ge_k,\ k=1,2,\cdots,m,$$

$$H:\ X\longrightarrow R^p:\qquad x\longmapsto(hx)_1.$$

这里，$(hx)_1$表示hx的第一个分量。

直接计算可知系统$\Sigma=(X,F,G,H)$的输入—输出映射f_Σ为：

$$f_\Sigma(u)=\left(\sum_{t=0}^{-T}HF^{-t}Gu(t),\qquad\sum_{t=0}^{-T}HF^{-t+1}Gu(t),\cdots\right),$$

这里

$$u=\sum_{t=0}^{-T}u(t)z^{-t}\in R^m[z].$$

再由乘积$\odot$的定义（1.2）不难证明 $f = f$.

由此定理，也可将(X,g,h)称为f的实现.

二、I—O 映射的周期性、可实现的充分必要条件

设 f: $R^m[z]\longrightarrow z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$是 R 上 $I-O$ 映射. 现在，引入新的周期性概念，较原有的周期性概念[1]更易于检验. 首先给出

定义 2.1　R^p 上向量列 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$称为周期的，如果存在首项系数为 1 的多项式$\varphi(z)=z^l+c_{l-1}z^{l-1}+\cdots+c_1z+c_0\in R[z]$，使得

$\alpha_{l+k}+c_{l-1}\alpha_{l+k-1}+\cdots+c_1\alpha_{k+1}+c_0\alpha_k=0$, $k=1,2,\cdots$. $\varphi(z)$称为 α 的周期式.

对于 f，每个$f(e_i)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(e_i)_kz^{-k}$可看成 R^p上的向量列$f(e_i)=(f(e_i)_1,f(e_i)_2,\cdots)$ $i=1,2,\cdots,m$.

定义 2.2　f 称为周期的，如果每个 $f(e_i)$, $i=1,2,\cdots,m$ 都是周期的.

引理 2.1　$\varphi(z)\in R[z]$是 $f(e_i)$的周期式的充分必要条件是 $\varphi(z)e_i\in\ker(f)$.

证　由 $f(\varphi(z)e_i)=\varphi(z)\odot f(e_i)$，再根据$\odot$的定义即不难证明.

下面的定理是本文的主要结果之一.

定理 2.1　R 上 $I-O$ 映射 f 可实现的充分必要条件是 f 是周期的.

证　必要性：设 $\Sigma=(X,F,G,H)$是 f 的实现. 因 X 为有限生成 R－模，故 F 可表为 R 方阵（仍记为 F）. 其特征多项式 $\Delta_F(z)=\det(zI-F)=z^l+c_{l-1}z^{l-1}+\cdots+c_1z+c_0\in R[z]$. 则$\Delta_F(F)=F^l+c_{l-1}F^{l-1}+\cdots+c_1F+c_0I=0$. 从而有

$$HF^{l+i-1}Ge_k+c_{l-1}HF^{l+i-2}Ge_k+\cdots+c_1HF^iGe_k+c_0HF^{i-1}Ge_k=0,$$
$$i=1,2\cdots,\quad k=1,2,\cdots,m.$$

因为 Σ 是 f 的实现，故 $f(e_k)=(HGe_k,HFGe_k,\cdots)$. 因而上式即表明 $\Delta_F(z)$是每个 $f(e_k)$的周期式.

充分性：设 $a_k(z)=z^{l_k}+c^{(k)}_{l_k-1}z^{l_k-1}+\cdots+c^{(k)}_1z+c^{(k)}_0$ 是 $f(e_k)$的周期式，$k=1,2,\cdots,m$. 令Δ表示由 $a_k(z)e_k$, $k=1,2,\cdots,m$生成的 $R^m[z]$的 $R[z]$－子模. 由引理 2.1 有 $\Delta\subset\ker(f)$. 现在证明商模 $X=R^m[z]/\Delta$ 是有限生成 R－模. 显然，$\bar e_k=e_k+\Delta$, $k=1,2,\cdots,m$ 是 X 的 $R[z]$－生成组. 故任 $\bar u\in X$ 有 $\bar u=\sum\limits_{k=1}^{m}b_k(z)\bar e_k$. 由$\Delta\subset\ker(f)$ 显然有$a_k(z)\bar e_k=0$. 这表明 $z^{l_k}\bar e_k$是 $z^{l_k-1}\bar e_k,\cdots$, $z\bar e_k$, $\bar e_k$的 R－线性组合，从而 $\bar u$ 也必为其线性组合. 因而 X 是有限生成 R－模. 令g: $R^m[z]\longrightarrow X$是自然同态，h: $X\longrightarrow z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$; $\bar u=u+\Delta\longrightarrow f(u)$. 则不难证明（$X$, g, h）是 f 的实现.

注　充分性的证明是构造性的。将它与定理1.1相结合即可算出实现。

$I-O$映射f的实现(X, g, h)称为规范的，如果g是映上的且h是一一的。

定理 2.2　如果f可实现，则必有规范实现。

证　f可实现，则由定理2.1存在子模$\Delta\subset\ker(f)$使得$R^m[z]/\Delta$是有限生成$R-$模。由此不难证明商模$X_f=R^m[z]/\ker(f)$也必是有限生成$R-$模。令g：$R^m[z]\longrightarrow X_f$是自然同态，$h$：$X_f\longrightarrow z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$：$\bar{u}=u+\ker(f)\longmapsto f(u)$。则不难证明$(X_f, g, h)$是规范的。

三、自由规范实现

定义 3.1　f的实现$\Sigma=(X, F, G, H)$称为自由的，如果状态模X是有限自由$R-$模。

引理 3.1[2]　f可实现，则必有自由实现。

在前面，我们已证明，f可实现则必有规范实现。但由规范实现诱导出的自由实现却不一定是规范的。因此一般交换环上可实现的f不一定有自由规范实现。本节的主要目的是证明，在主理想整环上，可实现的f必有自由规范实现。

引理 3.2　设R是整环，则f的规范实现(X, g, h)的状态模X是挠自由$R-$模。

证　(X, g, h)是规范的，故g是映上的。由模同构定理有$X\cong R^m[z]/\ker(g)$。由$f=hg$及h是一一的不难证明$\ker(g)=\ker(f)$。因而$X\cong R^m[z]/\ker(f)$。对任非零的$x=u+\ker(f)\in R^m[z]/\ker(f)$，如果$ax=0$，$a\in R$，即$au+\ker(f)=0$，则$au\in\ker(f)$。因而$af=(u)=0$。但$x\neq 0$。故$f(u)\neq 0$。则由$R$是整环必$a=0$。因而证明了$X$是挠自由$R-$模。

定理 3.1　设R是主理想整环。则R上的可实现$I-O$映射的规范实现是自由的。

证　由引理3.1及熟知的事实：主理想整环上的挠自由模是自由的，即可得证。

最后再给出一个重要结论。

定理 3.2　设R是整环。则在定理2.1中得到的实现是自由的。

证　在定理2.1证明中已指出，$z^{l_k-1}\bar{e}_k,\cdots,z\bar{e}_k$，$\bar{e}_k$，$k=1, 2, \cdots, m$是状态模$R^m[z]/\Delta$的$R-$生成组。现在，进一步证明当$R$是整环时它构成$R-$基底。设$\sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_{l_k-1}^{(k)}z^{l_k-1}\bar{e}_k+\cdots\lambda_1^{(k)}z\bar{e}_k+\lambda_0^{(k)}\bar{e}_k\right)=0$。因而$\lambda_{l_k-1}^{(k)}z^{l_k-1}e_k+$
$+\cdots+\lambda_1^{(k)}ze_k+\lambda_0^{(k)}e_k\in\Delta$。从而有

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_{l_k-1}^{(k)}z^{l_k-1}e_k+\cdots+\lambda_1^{(k)}ze_k+\lambda_0^{(k)}e_k\right)=\sum_{k=1}^{m}b_k(z)a_k(z)e_k,$$

因而得到

$$\lambda_{l_k-1}^{(k)} z^{l_k-1} + \cdots + \lambda_1^{(k)} z + \lambda_0^{(k)} = b_k(z) a_k(z), \quad k=1, 2, \cdots, m.$$ $a_k(z)$次数是l_k，R是整环，故等式右端次数不小于l_k。因而必$\lambda_{l_k-1}^{(k)} = \cdots = \lambda_1^{(k)} = \lambda_0^{(k)} = 0$，$k=1,2,\cdots,m$。即$z^{l_k-1}\bar{e}_k, \cdots, z\bar{e}_k, \bar{e}_k$构成$R$－基底。故$R^m[z]/\Delta$是自由$R$－模。

参 考 文 献

〔1〕 Rouchaleau, Y., Wyman, B., Linear Dynamical Systems Over Integral Domains, J. Comput. Syst. Sci., 9(1974), 129—142.

〔2〕 Tannenbaum, A., Invariance and System Theory, Springer－Verlag, New York (1980).

ON REALIZATION PROBLEM OF LINEAR SYSTEMS OVER COMMUTATIVE RINGS

Li Tiejun

(Nankai Universiuy, Tianjin)

Abstract

In the first part of this paper, we introduce a new concept of recurrence for linear input－output map over commutative rings. By this concept, we obtain the necessary and sufficient condition of realizability. In the second part of this paper, we discuss the existence of the free canonical realization.

Let R be a commutative ring with identity. The vector sequence $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ over R^p is called recurrent if there exists a monic polynomial $\varphi(z)=z^l+c_{l-1}z^{l-1}+\cdots+c_1z+c_0 \in R[z]$ such that

$$\alpha_{l+i}+c_{l-1}\alpha_{l+i-1}+\cdots+c_1\alpha_{i+1}+c_0\alpha_i=0, \quad i=1, 2, \cdots.$$

A linear input－output map $f: R^m[z] \longrightarrow z^{-1}R^p[[z^{-1}]]$ over R is called recurrent if every $f(e_i)$, $i=1, 2, \cdots$, m is recurrent.

The main results of this paper are:

1. A linear input－output map f over R is realizable if and only if f is recurrent.

2. Assume that R is a principal ideal domain, then there must exist the free canonical realization for the realizable input－output maps over R.