第2卷 第4期 控制理论与应用 Vol. 2, No. 4
1985年10月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS October, 1985

一类多项式矩阵方程的结式解法

齐 寅 峰

（南开大学）

摘 要

本文实际上建议了关于两种多项式矩阵方程 X(s)P(s)+Y(s)R(s)=F(s) 和 P(s)X(s)+Q(s)Y(s)=G(s)的结式阵解法，式中 X(s) 和 Y(s)为未知多项式阵，其余为适当维数的已知多项式阵。这种解法可以形成计算机算法的基础。它可以用于补偿器的设计。

用 $R[s]^{m\times n}$ 表示 m×n 多项式矩阵的全体。现 $P(s)\in R[s]^{m\times n}$，令 $\partial_{cj}[P(s)]$（$\partial_{rj}[P(s)]$）表示 $P(s)$的第 j 列（行）的列（行）次，$\Gamma_c[P(s)]$（$\Gamma_r[P(s)]$）表示 $P(s)$ 的列次（行次）阵。多项式矩阵方程

$$X(s)P(s)+Y(s)R(s)=F(s), \tag{1}$$

（其中 P,R,F 是已知的适当维数的多项式阵，而 $X(s)$，$Y(s)$是未知多项式阵）及其对偶形式的解，与线性系统的各种补偿器的设计有直接的联系。本文建议对特殊形式的 $F(s)$的（1）式的结式解法，它可以用来设计 Robust 控制器[3]，使控制器阶数最低，并在一定条件下可任意配置闭环系统的极点。

定义 1 称 $P[s]\in R(s)^{m\times m}$ 是列首一的，如果 $\Gamma_c[P(s)]=I_m$。

考虑 $P(s)\in R[s]^{m\times m}$，$R(s)\in R[s]^{p\times m}$.记 $d_j\triangleq\partial_{cj}[P(s)]$，$n\triangleq\sum\limits_{j=1}^{m}d_j$。假设 $P(s)$列正则，并且 $d_j>\partial_{cj}[R(s)]$，$j=1,\cdots,m$.对于 $l=1,2,\cdots$，定义 $l(m+P)$行 $n+ml$ 列实数矩阵 M_l 如下：

本文于 1983 年 8 月 16 日收到。1985 年 3 月 1 日收到修改稿。

$$\begin{bmatrix} R(s) \\ sR(s) \\ \vdots \\ s^{l-1}R(s) \\ P(s) \\ sP(s) \\ \vdots \\ s^{l-1}P(s) \end{bmatrix} = M_l \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ s & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s^{d_1+l-1} & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & s & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & s^{d_2+l-1} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & & s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & s^{d_m+l-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

如果 $l \geq n/p$，则 $(m+p)l \geq n+ml$。由于整数列 $i(l) \triangleq n+ml-\operatorname{rank} M_l \geq 0$，$\{i(l)\}$ 当有最小值 i^*：

$$i^* = \min_{l \geq n/p} \{i(l)\}, \tag{3}$$

令 ν 是方程

$$i^* = i(l) \tag{4}$$

的最小解，则称 $M \triangleq M_\nu$ 是多项式矩阵 $P(s)$ 和 $R(s)$ 的结式阵，ν 是其结式指数。

引理[1]　$P(s)$ 和 $R(s)$ 右互质的一个充要条件是 $\operatorname{rank} M = n+m\nu$。

现考虑方程

$$Y(s)R(s)+X(s)P(s)=G(s)H(s) \tag{5}$$

有如下定理，其结果虽然与文献[2]相似，但不尽相同，更重要的是，这里给出一个新证明，证明的过程，即是方程（5）的解法。

定理　假设 $P(s) \in R[s]^{m\times m}$，$R(s) \in R[s]^{p\times m}$ 满足以下条件：1）P 列首一；2）P 和 R 右互质；3）$d_j > \partial_{cj}[R(s)]+\delta$，$j=1,\cdots,m$，其中整数 δ 满足 $0 \leq \delta \leq \nu-1$，而 ν 是 P 和 R 的结式指数。又假定 $G(s)$，$H(s)$ 均 $\in R[s]^{m\times m}$，满足：4）H 列首一，且 $\partial_{cj}[H(s)]=d_j$，$j=1,\cdots,m$；5）G 行正则且 $\partial_{ri}[G(s)]=\nu-\delta-1$，$i=1,\cdots,m$，则方程（5）存在解 $X(s) \in R[s]^{m\times m}$，$Y(s) \in R[s]^{m\times p}$ 满足

i）$\Gamma_r[X(s)]=\Gamma_r[G(s)]$；

ii) $\partial_{ri}[X(s)]+\delta=\nu-1\geq\partial_{ri}[Y(s)]$, $i=1,\cdots,m$。

证 为节省篇幅，只考虑$\delta\geq1$情形，$\delta=0$时可类似证明。首先定义$m\times p$矩阵Y_i，$m\times m$矩阵X_i，$i=1,\cdots,m$和$m\times(d_{m-j+1}+\nu)$矩阵H_j，$j=m,\cdots,1$如下，其中M是$P(s)$和$R(s)$的结式阵：

$$X(s)\triangleq X_\nu+X_{\nu-1}s+\cdots+X_1s^{\nu-1}, \tag{6}$$

$$Y(s)\triangleq Y_\nu+Y_{\nu-1}s+\cdots+Y_1s^{\nu-1}, \tag{7}$$

$$G(s)H(s)\triangleq[H_m\vdots\cdots\cdots\vdots H_1]\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ s & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ s^{d_1+\nu-1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \\ 0 & & s \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & s^{d_m+\nu-1} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

则方程(5)等价于

$$[Y_\nu\vdots\cdots\cdots\vdots Y_1\vdots X_\nu\vdots\cdots\cdots\vdots X_1]M=[H_m\vdots\cdots\cdots\vdots H_1]。 \tag{9}$$

显然$H_m,\cdots,H_1$具有下述性质：对$j=m,\cdots,1$，H_j的最后δ列均为0，而其倒数第$\delta+1$列按上述顺序构成

$$\Gamma_c[G(s)H(s)]=\Gamma_r[G(s)]\triangleq G_1, \tag{10}$$

其中G_1是$G(s)$的最高次项系数矩阵：

$$G(s)\triangleq G_{\nu-\delta}+G_{\nu-\delta-1}s+\cdots+G_1s^{\nu-\delta-1}。 \tag{11}$$

由于$\partial_{ej}[P(s)]>\partial_{cj}[R(s)]+\delta$，易知$M$的由第$d_1+\nu-\delta$列至第$d_1+\nu$列所构成的子阵，由第$d_1+d_2+2\nu-\delta$列至$d_1+d_2+2\nu$列所构成的子阵，…，由第$d_1+\cdots+d_m+m\nu-\delta$列至$d_1+\cdots+d_m+m\nu$列所构成的子阵分别是

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & & & & \\
1 & 0 & & \cdots & 0 \\
0 & 0 & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \\
0 & 0 & & \cdots & 0 \\
\times & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\times & 0 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\times & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & \\
\times & \cdots & & \times & 1 \\
\vdots & & & \vdots & 0 \\
 & & & & \vdots \\
\times & \cdots & & \times & 0
\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & & & & \\
0 & 0 & & \cdots & 0 \\
1 & \vdots & & & \vdots \\
0 & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & & \cdots & 0 \\
\times & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\
 & 0 & & & \\
 & \vdots & & & \\
\times & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & \\
\times & \cdots & & \times & 0 \\
\vdots & & & \vdots & 1 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & \vdots \\
\times & \cdots & & \times & 0
\end{pmatrix}, \cdots,
$$

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & & & & \\
0 & 0 & & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & & & & \\
1 & 0 & & \cdots & 0 \\
\times & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & 0 & & & \\
\times & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & \\
\times & \cdots & & \times & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & 0 \\
\times & \cdots & & \times & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\to \text{倒数 } m(\delta+1) \text{ 行} \\
\\
\\
\\
\to \text{倒数 } m\delta \text{ 行} \\
\\
\\
\\
\\
\to \text{倒数 } m \text{ 行} \\
\\
\\
\\
\end{array}
\tag{11}
$$

其中“×”表示适当的实数。从上式不难知道，其结式阵M的最后$m(\delta+1)$行是线性独立的，又由引理导出 $\operatorname{rank}M=n+m\nu$，故 M 必含 $n+m\nu$ 个线性独立行。从倒数第一

行起挑选出这 $n+m\nu$ 个行，保持其先后次序，组成 $n+m\nu$ 方阵 $\hat{M}\triangleq[\hat{m}_{ij}]$。认定 $\hat{M}$ 的第 $1,\cdots,n+m\nu$ 行依次是 M 的第 $i_1,\cdots,i_{n+m\nu}$ 行。显见 $\hat{M}$ 和 M 的后 $m(\delta+1)$ 行相同。

考虑 $\hat{M}$ 的余子式。记 A_{ij} 为 $\hat{m}_{ij}$ 的余子式，可证：

$$A_{n+m\nu-m\delta+1,j}=0, \tag{12}$$

其中 $j=1,\cdots,d_1+\nu-\delta$；$d_1+\nu+1,\cdots,d_1+d_2+2\nu-\delta$；$\cdots$，$d_1+\cdots+d_{m-1}+(m-1)\nu+1,\cdots,d_1+\cdots+d_m+m\nu-\delta$。令 $[\overline{m}_{ij}]\triangleq\hat{M}^{-1}$，则对上述 j，显然

$$\overline{m}_{j,\,n+m\nu-m\delta+1}=0. \tag{13}$$

用同样方法，可证明

$$\overline{m}_{j,\,i}=0, \tag{14}$$

这里 $i=n+m\nu-m\delta+1,\cdots,n+m\nu$；$j=1,\cdots,d_1+\nu-\delta$，$d_1+\nu+1\cdots,d_1+d_2+2\nu-\delta,\cdots,d_1+\cdots+d_{m-1}+(m-1)\nu+1,\cdots,d_1+\cdots+d_m+m\nu-\delta$。用类似方法，可得出 $\hat{M}^{-1}$ 由第 $n+m\nu-(\delta+1)m+1$ 列至 $n+m\nu-m\delta$ 列构成的子阵为

$$\left(\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & \cdots\cdots & & 0\\
\vdots & \vdots & & & \vdots\\
0 & & & & \\
1 & 0 & \cdots\cdots & & 0\\
\times & \times & \cdots\cdots & & \times\\
\vdots & & & & \vdots\\
\times & \times & \cdots\cdots & & \times\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\times & \cdots\cdots & & & \times\\
\vdots & & & & \vdots\\
\times & \cdots\cdots & & & \times\\
 & \vdots & \vdots & & \\
0 & \cdots\cdots & & 0 & 0\\
\vdots & & & \vdots & \vdots\\
 & & & & 0\\
0 & \cdots\cdots & & 0 & 1\\
\times & \cdots\cdots & & & \times\\
\vdots & & & & \vdots\\
\times & \cdots\cdots & & & \times
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\to \text{第 } d_1+\nu-\delta \text{ 行}\\
\\
\\
\to \text{第 } d_1+\nu \text{ 行}\\
\\
\\
\\
\to \text{第 } d_1+d_2+2\nu-\delta \text{ 行}\\
\\
\\
\to \text{第 } d_1+d_2+2\nu \text{ 行}\\
\\
\\
\\
\\
\to \text{第 } d_1+\cdots+d_m+m\nu-\delta \text{ 行}\\
\\
\\
\to \text{第 } d_1+\cdots+d_m+m\nu \text{ 行}
\end{array}$$

定义 $m\times(n+m\nu)$ 阵 $\hat{Z}$ 如下：

$$\hat{Z}=[H_m \vdots \cdots\cdots \vdots H_1]\hat{M}^{-1}, \tag{16}$$

又定义 $m\times n$ 阵 $\hat{Y}$，$m\times m$ 方阵 $\hat{X}_i$，$i=\nu$，…，1 如下：

$$[\hat{Y} \vdots \hat{X}_\nu \vdots \cdots\cdots \vdots \hat{X}_1]=\hat{Z}, \tag{17}$$

由于 H_m，…，H_1 的特性以及（14）—（17），显然

$$\hat{X}_{\delta+1}=G_1, \quad \hat{X}_\delta=\cdots=\hat{X}_1=0, \tag{18}$$

然后构造 $Z_{m\times[(m+p)\nu]}$ 如下：它的第 i_1，…，$i_{n+m\nu}$ 列分别等于 $\hat{Z}$ 的第 1，…，$n+m\nu$ 列，其余各列为 0。令(6)(7)式所定义的 X_i，Y_i，$i=1$，…，ν 如下：

$$[Y_\nu \vdots \cdots \vdots Y_1 \vdots X_\nu \vdots \cdots \vdots X_1]=Z, \tag{19}$$

注意到 $\hat{M}$ 和 M 有相同的后 $m(\delta+1)$ 行，显然

$$X_{\delta+1}=\hat{X}_{\delta+1}, \quad X_\delta=\hat{X}_\delta, \quad \cdots, \quad X_1=\hat{X}_1, \tag{20}$$

因而
$$X_{\delta+1}=G_1, \quad X_\delta=\cdots=X_1=0. \tag{21}$$

即 $X(s)$，$Y(s)$ 有所要求的性质 i），ii）。 证毕。

根据以上证明，方程（5）求解算法归纳如下：

1. 计算 P、R 的结式 M；
2. 用证明中方法生成 $\hat{M}$；
3. 计算公式（8）中 H_m，…，H_1；
4. 用公式（16）算出 $\hat{Z}$；
5. 构造 Z；
6. 用（19），（6），（7）得到 $X(s)$，$Y(s)$。

参 考 文 献

〔1〕 Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag（1974）.

〔2〕 韩京清，多变量控制系统理论，延边大学，(1980)。

〔3〕 Qi Yinfeng and Tu Fengsheng, Robust Control in Frequency Domain, Scientia Sinica (Series A) Vol. XXVII, 1984, Academic Press, Beijing.

RESOLUTION OF A KIND OF POLYNOMIAL MATRIX EQUATION

Qi Yinfeng

(Nankai University, Tianjin)

Abstract

We suggested a new solution method for two polynomial matrix equations: $X(s)P(s)+Y(s)R(s)=F(s)$ and $P(s)X(s)+Q(s)Y(s)=G(s)$, where polynomial matrices $X(s)$ and $Y(s)$ are unknown, others are known polynomial matrices with proper dimensions. This method could be used in compensator and controller design and lay a fundation of developing a computer algorithm.

第五届全国控制理论及其应用学术交流会于1985年9月在安徽屯溪举行

中国自动化学会第五届全国控制理论及其应用学术交流会于 1985 年 9 月 16 日至20日在安徽屯溪举行．来自全国自动控制界的近一百五十名代表参加了这次学术交流会．有近百名代表在各分组会上报告了控制理论的理论研究和应用研究成果．报告内容涉及到控制理论的各个分支中的理论课题和应用方面．在这次学术交流会上邀请了参加IFAC 第七次系统辨识和参数估计会议、IFAC 计算机辅助设计会议、应用数学与控制理论国际学术会议的同志做了报告．报告涉及到学术动态、主要研究结果等．会议还邀请有关同志就控制理论的一个专题做了报告．参加会议代表就今后控制理论、系统理论的发展发表了自己的观点，交流了看法，并就控制科学如何更好地促进"四化"建设等问题进行了认真的探讨．会议期间控制理论专业委员会举行了工作会议，专业委员会成员们回顾了第四届学术交流会议以来的工作，对一九八六年专业委员会组织有关学术活动问题交换了意见．委员们一致认为鉴于自动控制界学术活动日趋活跃、学术成果和应用成果日益增多的现状，今后控制理论及其应用学术交流会改为年会是合适的．

在这次学术交流会上印刷了"会议文集"——第五届全国控制理论及其应用学术交流会论文集（上、下）．

学术交流会由控制理论专业委员会主任疏松桂、副主任屠善澄、秦化淑同志主持．

（化淑）