第2卷 第4期 控制理论与应用 Vol. 2, No. 4
1985年10月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS October, 1985

二阶离散系统的时域分析法

王士杰

（华东纺织工学院）

摘　要

二阶离散系统的时域分析是数字控制系统的一个基本问题，它涉及到闭环特征根在 z 平面上的位置对系统过渡的影响．可是目前所见到的离散系统和计算机控制的专著[1-5]对这个问题解决得不太彻底而缺乏进一步的分析研究．本文在这个问题上有了进展，解决了其单位阶跃响应的递推计算问题．

设闭环的离散系统，其脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{C_0+C_1z^{-1}+\cdots+C_jz^{-j}}{1-Bz^{-1}+Az^{-2}}=\frac{1}{1-Bz^{-1}+Az^{-2}}\sum_{i=0}^{j}C_iz^{-i},\qquad(1)$$

则根据Jury稳定准则[1]，可求出稳定条件为 $B-A<1$、$B+A>-1$ 和 $|A|<1$．本文拟求出当 $0<A<1$ 和 $B^2<4A$ 时 $G(z)$ 的单位阶跃响应．由于 $G(z)$ 在上述条件下的二个特征根为

$$p_1=0.5(B+j\sqrt{4A-B^2})=\sqrt{A}(\cos\theta+j\sin\theta),\qquad(2)$$

$$p_2=0.5(B-j\sqrt{4A-B^2})=\sqrt{A}(\cos\theta-j\sin\theta),\qquad(3)$$

式中的 θ 可由下式

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{4A-B^2}}{B}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)\qquad(4)$$

确定，所以 $G_i(z)=C_iz^{-i}/(1-Bz^{-1}+Az^{-2})$ 的单位阶跃响应是

$$y_i(kT)=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{G_i(z)}{1-z^{-1}}z^{k-1}dz=C_i\left[\left.\frac{z^{k-i+2}}{z^2-Bz+A}\right|_{z=1}+\left.\frac{z^{k-i+2}}{(z-1)(z-p_2)}\right|_{z=p_1}+\left.\frac{z^{k-i+2}}{(z-1)(z-p_1)}\right|_{z=p_2}\right].\qquad(5)$$

把式（2）和（3）代入式（5）后，可得

$$y_i(kT)=0\qquad(k=0,1,2,\cdots,i-1)\qquad(6)$$

本文于1984年11月17日收到．

和

$$y_i(kT)=\frac{C_i}{1-B+A}\left\{1-\frac{1}{\cos\varphi}A^{0.5(k-i+2)}\cos[(k-i+2)\theta+\varphi]\right\}$$

$$(k=i,i+1,\cdots). \tag{7}$$

以上各式中 T 为采样周期，而 φ 角可用下式

$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}-\frac{1}{\sqrt{A}\sin\theta}\right]=\mathrm{tg}^{-1}\left[\mathrm{ctg}\,\theta(1-\frac{2}{B})\right]=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{B-2}{\sqrt{4A-B^2}}\right] \tag{8}$$

确定。其实若以 $k=i-2$ 和 $i-1$ 代入式（7），也可以获得 $y_i(kT)=0$。

由式（6）和（7），可写出式（1）的单位阶跃响应为

$$y(kT)=\sum_{i=0}^{m}y_m(kT)=\frac{1}{1-B+A}\sum_{i=0}^{m}C_i\left\{1-\frac{1}{\cos\varphi}A^{0.5(k-i+2)}\cos[(k-i+2)\theta+\varphi]\right\}$$

$(k=0,1,\cdots,j-1$ 时取 $m=k$；$k=j,j+1,\cdots$ 时取 $m=j)$。　（9）

对式（9）进行细致的整理后，可得

$$y(kT)=\frac{1}{1-B+A}\left\{\sum_{i=0}^{m}C_i-\frac{D_m}{\cos\varphi}A^{0.5(k+2-m)}\cos[(k+2-m)\theta+\varphi+\beta_m]\right\}, \tag{10}$$

式中正整数 m 的取法与式（9）相同，而式（10）中的 D_m，β_m 可用如下递推公式：

$$\left.\begin{aligned}&\beta_0=0,\quad D_0=C_0;\\ &\beta_i=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\sqrt{A}D_{i-1}\sin(\theta+\beta_{i-1})}{C_i+\sqrt{A}D_{i-1}\cos(\theta+\beta_{i-1})}\right],\\ &D_i=\frac{C_i+\sqrt{A}D_{i-1}\cos(\theta+\beta_{i-1})}{\cos\beta_i}\\ &(i=1,2,\cdots,m).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

运用式（4）、（8）、（10）、（11），可用手算或计算机可计算出式（1）的单位阶跃响应的时域解。

若令　$\theta=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n T$ 和 $A^{0.5}=e^{-\zeta\omega_n T}$，即

$$\zeta=-\frac{\ln A}{\sqrt{(\ln A)^2+(2\theta)^2}} \tag{12}$$

和

$$\omega_n=\frac{1}{2T}\sqrt{(\ln A)^2+(2\theta)^2}=-\frac{\ln A}{2\zeta T}, \tag{13}$$

则可把式（10）改写成

$$y(kT)=\frac{1}{1-B+A}\left\{\sum_{i=0}^{m}C_i-\frac{D_m}{\cos\varphi}\,e^{-\zeta\omega_n(k+2-m)T}\cos[\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n(k+2-m)T+\varphi+\beta_m]\right\},\tag{14}$$

式中 ζ 为阻尼比，ω_n 为无阻尼振荡角频率．这样 $y(kT)$ 的包络线的方程式为

$$y(t)=\frac{1}{1-B+A}\left\{\sum_{i=0}^{m}C_i-\frac{D_m}{\cos\varphi}\,e^{-\zeta\omega_n(t-t_m)}\cos[\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n(t-t_m)+\varphi+\beta_m]\right\},\tag{15}$$

式中的 m 的取法是当 $t<jT$ 时 $m=\mathrm{int}(t/T)$，$t\geq jT$ 时取 $m=j$，另外式中的 $t_m=(m-2)T$。

运用导数等于零求极值的方法，可求出在 t 等于

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\left(\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}\zeta-\varphi-\beta_j\right)+t_j\tag{16}$$

时，$y(t)$ 取极大值 y_{max}

$$y_{max}=\frac{1}{1-B+A}\left\{\sum_{i=0}^{j}C_i+\frac{D_j}{\cos\varphi}\sqrt{1-\zeta^2}\,e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}\zeta-\varphi-\beta_j\right)}\right\}\tag{17}$$

再看极点位置对过渡过程的影响。由式（12）、（13）可知过渡过程的衰减振荡频率为 $\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n=\theta/T$，也就是衰减振荡周期

$$T_0=\frac{2\pi T}{\theta},\tag{18}$$

而衰减比

$$N=e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=A^{-\frac{\pi}{\theta}}.\tag{19}$$

$\sqrt{A}$ 和 θ 是闭环极点在 z 平面上的极坐标，由式（18）和（19）可以明显地看出极点位置对振荡周期和衰减比的影响。

文献[1]给出了 $C(z)/R(z)=K(z-z_1)/[(z-p_1)(z-\overline{p_1})]$ 求单位阶跃响应的计算公式和图表，可是要作图和计算，手续比较繁琐，且不能用来解决本文式（1）的有关问题，为了说明本文方法的正确性，不妨举该文献中的一数例，用本文的方法加以计算。

脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{83531.25(z+1)}{83644z^2+58893.25z+24525.25}=0.99865\frac{\sum\limits_{i=0}^{j}C_iz^{-i}}{1-Bz^{-1}+Az^{-2}}, \tag{20}$$

式中 $A=0.29321$，$B=-0.70409$，$C_0=0$，$C_1=C_2=1$，$j=2$。由于 $|A|<1$，$B-A=-0.9973<1$，$B+A=-0.41088>-1$，据 Jury 氏准则系统是稳定的。据 $B^2-4A=-0.66709<0$，p_1、p_2为共轭复数。由式（4），$\theta=130.552°$；由式（8），$\varphi=-73.075°$。由式（11），$\beta_0=\beta_1=0$，$D_0=0$，$D_1=C_1=1$，而

$$\beta_2=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\sqrt{A}D_1\sin(\theta+\beta_1)}{C_1+\sqrt{A}D_1\cos(\theta+\beta_1)}\right]=32.414°,$$

$$D_2=\frac{C_1+\sqrt{A}D_1\cos(\theta+\beta_1)}{\cos\beta_2}=0.76754.$$

根据式（10），$y(0T)=0$，$y(T)$应由

$$y(T)=\frac{0.99865}{1-B+A}\left\{C_1-\frac{D_1}{\cos\varphi}A^{0.5(1+2-1)}\cos[(1+2-1)\theta+\varphi+\beta_1)\right\}$$

$$=0.99865.$$

而当 $k=2,3,\cdots$时，由式（10）

$$y(kT)=\frac{0.99865}{1-B+A}\left\{C_1+C_2-\frac{D_2}{\cos\varphi}A^{0.5k}\cos(k\theta+\varphi+\beta_2)\right\}$$

$$=1-1.31825\cdot(0.29321)^{0.5k}\cos(130.552k-40.661°).$$

因 $tj=(j-2)T=0$，式(12)算出 $\zeta=0.25996$，式（13）算出 $\omega_n=2.35969/T$，当采样周期 $T=0.25$ 秒时，$\omega_n=10.4876$ 1/秒，这样由式（15），

$$y(t)=\frac{0.99865}{1-B+A}\left[C_1+C_2-\frac{D_2}{\cos\varphi}e^{-\zeta\omega_nt}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_nt+\varphi+\beta_2)\right]$$

$$=1-1.31825\,e^{-2.72635t}\cos(10.1270t-40.661°).$$

接着由式（16）和（17）计算出在 $t=0.354$ 秒时，$y(t)$有极大值 1.6326。这些计算结果与文献〔1〕是完全一致的。

参 考 文 献

〔1〕 Benjamin. C, Kuo., Digital Control Systems, (1980), 351—366.

〔2〕 Charles, L. Phillips & H. Troy Nagle, JR, Digital Control System Analysis and Design, (1984), 168—172.

〔3〕 刘植桢等，计算机控制，清华大学出版社（1981），135—137.

〔4〕 戴世宗，数字随动系统，科学出版社（1976），170—173.

〔5〕 高衿畅，离散控制系统原理及应用，化学工业出版社（1984），122—125.

A COMPUTATION METHOD FOR THE TIME RESPONSE OF A SECOND-ORDER DISCRETE SYSTEM

Wang Shijie

(East China Institute of Textile Science and Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper a method for cucalating the step response of tne second order discrete system is presented. The z-transfer function of the system is represented by $G(z)=\sum_{i=0}^{j} C_i z^{-i}/(1-Bz^{-1}+Az^{-2})$. The correlation between the response and pole locations in the z-plane is discussed briefly and clearly.