

线性系统能控性、能观测性的数值判断

毛 剑 琴

(北京航空学院)

摘 要

本文讨论数字计算机判断线性、时不变系统能控性、能观测性的问题,引入了矩阵数值秩的概念以及通过奇异值判断矩阵数值秩的方法。在此基础上给出了线性系统能控性、能观测性数值判断的概念和方法。以 Schuler 平台的初始对准问题为例说明了这一方法。利用奇异值扰动的性质,进行了系统能控性、能观测性的鲁棒性分析。

一、引 言

能控性与能观测性是现代控制理论中的两个基本概念。特别是对于线性系统来说,其许多主要属性与这两个基本性质有关。然而,通过数字计算机来实现能控性、能观测性的判断至今仍是一个尚未完全解决的问题。本文旨在探索可能解决这一问题的途径。

近二十年来,多变量线性系统理论中已经发展了一些判断能控性、能观测性的方法。^{[1]—[4]} 这些方法往往最后都归结为矩阵秩的判断。

本文首先通过一些数值例子说明,在舍入误差存在的情况下,用行列式或特征值判断矩阵秩时出现的数值不稳定性。为解决这一问题,引入了矩阵数值秩的概念,并阐述了通过奇异值确定矩阵数值秩的方法。

在此基础上建立了线性、时不变系统能控性、能观测性的数值判断的概念和方法。通过数值判断,不仅能得到能控(或能观测)子空间的维数 r ,还能得到 r 维子空间的能控度。

以 Schuler 平台初始对准问题中能观测性的判断为例,对数值判断的概念和方法给予了具体的说明。

利用奇异值扰动的性质,得出了保持能控、能观测子空间维数不变或能控度、能观测度也不变时系统参数允许的扰动范围。即所谓能控性、能观测性的鲁棒性分析。

奇异值分解的理论、算法及其软件^{[5], [7]}是本文的理论依据和数值工具。有关的数值计算是在 M-160(II)机上借助 LINPACK 数学库进行的。

本文的工作得到中国科学院科学基金的资助。

本文于 1984 年 8 月 9 日收到, 1985 年 3 月 4 日收到修改稿。

二、矩阵的数值秩及通过奇异值判断数值秩的方法

在数字计算机中, 由于机器的字长是有限的, 一个具体的数 a 表示为浮点数 $a^* = fl(a)$ 后将产生舍入误差。同样地, 所有的算术运算: $fl(a \pm b)$, $fl(a \cdot b)$, $fl(a/b)$ 都将引入舍入误差。

在代数理论中, 用行列式或特征值来判断矩阵的秩。但由于舍入误差的存在, 用计算机来判断矩阵的秩时, 这些方法是不完全适用的。

例1 设有 n 阶矩阵 P ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \end{pmatrix},$$

其行列式 $|P| = 1$; 其特征值全为 1。则矩阵的秩为 n 。但当第一列的每个元有小扰动 $-1/2^{n-1}$ 时,

$$P' = \begin{pmatrix} 1-1/2^{n-1} & -1 & \cdots & -1 \\ -1/2^{n-1} & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -1/2^{n-1} & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}.$$

这时 P' 完全是一个奇异矩阵, 其秩 $< n$ 。

例2 设有 n 阶矩阵 P ,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其行列式 $|P| = 0$, 特征值全为 0; P 的秩为 $n-1$ 。但当 p_{n1} 有小扰动 $\varepsilon > 0$ 时,

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

这时 $|P'| = \varepsilon \neq 0$; 特征值的绝对值全为 $\sqrt[n]{\varepsilon} \neq 0$; P' 的秩为 n 。

在例1中, 当 n 充分大时, $1/2^{n-1}$ 可以任意小。在例2中, ε 可以任意小 (但

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\varepsilon} = 1$). 考虑到舍入误差的存在, 在计算中这样的小扰动是完全有可能发生

的. 而这些小扰动将造成秩的判断的错误. 由此说明, 用行列式或特征值判断矩阵秩的方法是数值不稳定的. 其主要原因是, 这样的判断不能给出矩阵接近奇异的程度方面的信息. 为此, 需要从数值的角度对矩阵秩的定义及其判断方法作进一步的讨论.

定义 1^[8] 令 $P \in R^{m \times n}$, $\text{rank}(P) = r \leq \min(m, n)$, 设 $Q \in R^{m \times n}$, 若对给定的 $\varepsilon > 0$, 有

$$r = \inf \{ \text{rank}(Q) : \|P - Q\| \leq \varepsilon \}. \quad (1)$$

对于给定的 $\delta > 0$, 有:

$$\varepsilon < \delta \leq \sup \{ \gamma : \|P - Q\| \leq \gamma \Rightarrow \text{rank}(Q) \geq r \}. \quad (2)$$

则称矩阵 P 对于范数 $\|\cdot\|$ 具有数值秩 (δ, ε, r) . 其中, $\|\cdot\|$ 可以是谱范数或 Frobenius 范数. 相应地记数值秩为 $(\delta, \varepsilon, r)_2$ 或 $(\delta, \varepsilon, r)_F$.

下面的定理给出了利用奇异值确定矩阵数值秩的方法.

定理 1^[8] 令 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ 为 P 的奇异值. 则当且仅当: $\sigma_r \geq \delta > \varepsilon \geq \sigma_{r+1}$ 时, P 具有数值秩 $(\delta, \varepsilon, r)_2$; 当且仅当: $\sigma_r^2 + \sigma_{r+1}^2 + \dots + \sigma_n^2 \geq \delta^2 > \varepsilon^2 \geq \sigma_{r+1}^2 + \dots + \sigma_n^2$ 时, P 具有数值秩 $(\delta, \varepsilon, r)_F$.

在定义 1 中, ε 为零阈, 即为零的容差; r 为在零阈 ε 下, 矩阵 P 的秩; δ 则为 ε 变化范围的上界, 即当 ε 在这个范围内变化时, 矩阵 P 的秩保持至少等于 r .

在舍入误差存在的情况下, 数值秩能更好地描述矩阵的秩, 并能描述矩阵接近奇异的程度.

例 3 不难算出, 例 2 中 P 的奇异值为 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \dots, \sigma_{n-1} = 1, \sigma_n = \varepsilon$. 当具有与舍入误差 ε_M 相同的量级时, $fl(\sigma_n) = 0$. 这时 P 具有数值秩为 $(1, \varepsilon_M, n-1)$. 即在零阈 ε_M 下, 矩阵 P 之秩为 $n-1$; 并且只要取零阈 < 1 , P 之秩总是保持为 $n-1$. 然而, 当 n 足够大时, P 之特征值之绝对值 $|\lambda/\varepsilon|$ 均将接近于 1. 即这时若用特征值判断, 矩阵的秩为 n . 比较二者, 显然借助数值秩得出的判断更为准确.

三、能控性、能观测性的数值判断

设有线性、时不变系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (3)$$

其能控性与能观测性矩阵分别为

$$W_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B], \quad (4)$$

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

在舍入误差存在的情形下,按 kalman 判据对系统进行能控性、能观测性判断时,需要在数值秩的基础上作进一步的讨论。

首先,在控制系统中 ϵ, δ, r 具有更为具体的物理意义。零阈 ϵ 反映控制系统的参数或所使用的计算机的精度。设 W_c 或 W_o 中各元的误差为 Δ_{ij} , 则令

$$\tau_1 = \max_{i,j} |\Delta_{ij}|;$$

设 m, n 为 W_c 或 W_o 阵的阶数, σ_1 为其最大的奇异值, ϵ_M 为所用计算机的浮点数表示的相对精度, 令

$$\tau_2 = \sqrt{mn} \cdot \epsilon_M \cdot \sigma_1.$$

于是取零阈 ϵ 为

$$\epsilon = \max(\tau_1, \tau_2).$$

这时, r 为在零阈 ϵ 下能控或能观测子空间的维数。仿照[1]中的定义, 则 $\tilde{\delta} = \sigma_r - \epsilon$ 便为 r 维子空间的能控度或能观测度。

其次, 仅由 $\tilde{\delta}$ 还不能完全说明 r 维子空间的能控度或能观测度。若将 $\tilde{\delta}$ 称为绝对能控度或能观测度, 则 $\eta = \tilde{\delta} / \sigma_1 - \epsilon$ 即为相对能控度或能观测度。只有当 $\tilde{\delta}, \eta$ 都充分大时, 才能说明系统的能控或能观测程度较好。

综上所述, 我们给出线性系统能控性 (或能观测性) 的数值判断的定义如下。

定义 2 n 维线性、时不变系统能控性 (或能观测性) 的数值判断为, $(r, \epsilon, \tilde{\delta}, \eta)$, 是指在零阈 ϵ 下, 系统具有 r 维能控 (或能观测) 子空间, 其绝对能控度为 $\tilde{\delta}$, 相对能控度为 η 。当 $r=n$ 时, 称系统为数值上完全能控 (或能观测)。

例 4 设 n 阶线性、时不变系统中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & \cdots & -2^{n-1} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其能控性矩阵为

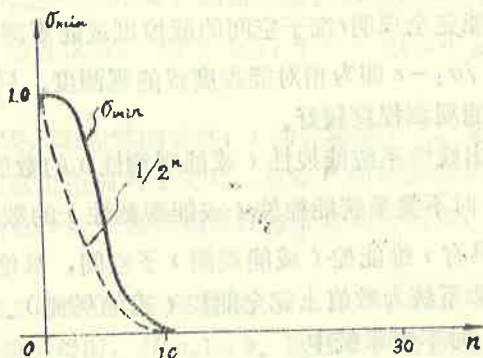
$$W_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

显见, 这里的 W_c 与例 1 中的矩阵 P 相同。

对于 $n=1, 2, \cdots, 30$ 算出其奇异值如下 (表 1);

表 1

n	σ_i
1	1
2	$\sqrt{2}, 1$
$\vdots$	
10	5.62048, 2.34658, 1.83719, 1.66458, 1.58656, 1.54559, 1.5224, 1.5091, 1.50216, 0.00293
30	18.2029, 6.2232, 3.91348, 2.97679, 2.49045, 2.20321, 2.01918, 1.89434, 1.80592, 1.74113, 1.69235, 1.65479, 1.62532, 1.60183, 1.58287, 1.56738, 1.55465, 1.54408, 1.53528, 1.52793, 1.52178, 1.51665, 1.51239, 1.50888, 1.50604, 1.50380, 1.50211, 1.50093, 1.50023, 0.00000



当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sigma \rightarrow 0$

计算表明, 其中最小的奇异值 $\sigma_{\min}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时按 $1/2^n$ 的速度趋于零.

设取零阈 $\varepsilon = 10^{-5}$, 则对于 $n = 10, 30$, 系统能控性的数值判断为 (表2):

表 2

n	$(r, \varepsilon, \tilde{\delta}, \eta)$
10	$(10, 10^{-5}, 0.00292, 0.00052)$
30	$(29, 10^{-5}, 1.50022, 0.0824)$

由此说明, 当 n 足够大时, 该系统非常接近于 n 维不可控系统. 然而, W_c 的行列式或特征值却始终与零保持相当的距离, 因而从中得不到这样的信息. 这时, 只有借助数值判断才能正确地得到有关系统能控性方面的结论.

四、舒勒 (Schuler) 平台的初始对准问题^[1] 中, 能观测性的数值判断

惯性导航稳定平台初始对准的状态方程是

$$\begin{pmatrix} \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$y = c \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 是平台相对于真当地地理座标偏离的欧拉角; $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ 是控制力矩产生的角速度; y 为加速度表感受到的重力加速度的分量。

无量纲化以后, 舒勒平台能观测性的数值判断基于求能观测矩阵 W_0 的数值秩:

表 3

纬度 ϕ	W_0 的 奇 异 值 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)	平台能观测性的数值判断 ($r, \varepsilon, \tilde{\delta}, \eta$)
0°	(1.414, 1, 1)	(3, 10^{-7} , 1, 0.701)
20°	(1.455, 1.194, 0.832)	(3, 10^{-7} , 0.832, 0.571)
40°	(1.553, 1.414, 0.644)	(3, 10^{-7} , 0.644, 0.415)
50°	(1.608, 1.517, 0.534)	(3, 10^{-7} , 0.534, 0.332)
60°	(1.658, 1.606, 0.412)	(3, 10^{-7} , 0.412, 0.25)
70°	(1.683, 1.673, 0.28)	(3, 10^{-7} , 0.28, 0.167)
75°	(1.713, 1.699, 0.212)	(3, 10^{-7} , 0.212, 0.124)
80°	(1.723, 1.718, 0.141)	(3, 10^{-7} , 0.141, 0.082)
84°	(1.729, 1.727, 0.085)	(3, 10^{-7} , 0.085, 0.049)
86°	(1.732, 1.729, 0.057)	(3, 10^{-7} , 0.057, 0.033)
88°	(1.732, 1.732, 0.0285)	(3, 10^{-7} , 0.0285, 0.016)
89°	(1.732, 1.732, 0.0143)	(3, 10^{-7} , 0.0143, 0.0082)
90°	(1.732, 1.732, 0)	(2, 10^{-7} , 1.5, 0.866)

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & -\sin^2\varphi & \sin\varphi \cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 φ 为当地纬度. 对于不同的纬度, 舒勒平台能观测性的数值判断是不同的, 其结果列于表 3. 考虑到计算机的精度, 取 ε 为 10^{-7} .

数值判断的结果表明, 在纬度低于 75° 范围内, 系统具有 3 维可观测子空间, 并具有较好的能观测度; 在纬度高于 80° 的范围内, 3 维可观子空间的能观测度较差; 在纬度为 90° 时, 没有 3 维可观测子空间存在. 因而, 这种平台在纬度高于 80° 的范围内进行初始对准是相当困难的. 值得指出, 这一判断结果与已有的实际经验是基本一致的.

五、能控性、能观测性的鲁棒性分析

由于实际的物理系统中, 有时一些参数不能准确地测到, 有时一些参数会受到扰动, 因此需要讨论在系统参数有扰动时, 能控性、能观测性的变化.

系统某一性质的鲁棒性, 是指在某类扰动下, 这种性质保持不变的能力. 设线性系统 (3) 的参数 (A, B, C) 有某一扰动为 $(\Delta A, \Delta B, \Delta C)$. 对于 (A, B, C) 和 $(A + \Delta A, B + \Delta B, C + \Delta C)$ 相应地有 $W_c, \bar{W}_c$ 和 $W_0, \bar{W}_0$. 令 $\{\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \dots, \sigma_{cn}\}$ 为 W_c 的奇异值; $\{\sigma_{01}, \sigma_{02}, \dots, \sigma_{0n}\}$ 为 W_0 的奇异值. 并相应地有 $\tilde{\delta}_c, \varepsilon_c$ 及 $\tilde{\delta}_0, \varepsilon_0$.

定理 2 线性、时不变系统 (A, B, C) 在参数的随机扰动下, 其能控(或能观测)子空间的维数 r 具有鲁棒性的充分条件是

$$\|W_c - \bar{W}_c\|_F < \min(\tilde{\delta}_c, \varepsilon_c - \sigma_{c, r+1}), \quad (8)$$

当 $r = n$ 时, 为

$$\|W_c - \bar{W}_c\|_F < \tilde{\delta}_c. \quad (9)$$

(对于能观测问题, 其充分条件是:

$$\|W_0 - \bar{W}_0\|_F < \min(\tilde{\delta}_0, \varepsilon_0 - \sigma_{0, r+1}),$$

当 $r = n$ 时, 为

$$\|W_0 - \bar{W}_0\|_F < \tilde{\delta}_0.)$$

证 设 W_c 的奇异值为 $\{\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \dots, \sigma_{cn}\}$, 并相应地有 $\bar{\delta}_c, \bar{\varepsilon}_c$, 其中 $\bar{\varepsilon}_c = \varepsilon_c$. 据 [5] 中的定理 6.6 和 6.4 有

$$|\sigma_{ci} - \bar{\sigma}_{ci}| \leq \|W_c - \bar{W}_c\|_F \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

又已知:

$$\|W_c - \bar{W}_c\|_F < \min(\tilde{\delta}_c, \varepsilon_c - \sigma_{c, r+1}),$$

故

$$|\sigma_{c_i} - \bar{\sigma}_{c_i}| < \min(\tilde{\delta}_c, \varepsilon_c - \sigma_{c, r+1}).$$

所以有

$$\bar{\sigma}_{c_i} > \varepsilon_r \text{ 和 } \bar{\sigma}_{c, r+1} < \varepsilon_c.$$

因而经过数值判断后, $\bar{W}_c$ 的能控子空间的维数仍为 r . 当 $r=n$ 时, 显然只须条件

$$\|W_c - \bar{W}_c\|_F < \tilde{\delta}_c. \quad \text{证毕.}$$

应指出, 能控子空间的维数具有鲁棒性并不一定意味着该系统的能控性具有鲁棒性. 一个系统的能控性具有鲁棒性, 意味着能控子空间的维数以及该子空间的能控度都具有鲁棒性. 为此, 类似于定理 2 不难证明以下定理.

定理 3 线性、时不变系统 (A, B, C) 在参数的随机扰动下, 其能控 (或能观测) 子空间的维数 r 及其能控度 (或能观测度) 均具有鲁棒性的充分条件是:

$$\|W_c - \bar{W}_c\|_F < \min(\tilde{\delta}_c \cdot \mu, (\varepsilon_c - \sigma_{c, r+1}) \cdot \mu) \quad (10)$$

当 $r=n$ 时, 为:

$$\|W_c - \bar{W}_c\|_F < \tilde{\delta}_c \cdot \mu. \quad (11)$$

(对于能观测问题, 其充分条件是:

$$\|W_o - \bar{W}_o\|_F < \min(\tilde{\delta}_o \cdot \mu, (\varepsilon_o - \sigma_{o, r+1}) \cdot \mu)$$

当 $r=n$ 时,

$$\|W_o - \bar{W}_o\|_F < \tilde{\delta}_o \cdot \mu.)$$

其中, μ 为能控度 (或能观测度) 的容差范围.

(证明同定理 2)

当参数的扰动为小量时, 将 $\Delta A, \Delta B$ 代入 (4) 并取一阶小量, (8) 成为:

$$\begin{aligned} & \|(\Delta B \Delta A \cdot B + A \cdot \Delta B \quad 2A \cdot \Delta A \cdot B + A^2 \Delta B \quad \cdots \quad (n-1)A^{n-2} \cdot \Delta A \cdot B \\ & \quad + A^{n-1} \cdot \Delta B)\|_F < \min(\tilde{\delta}_c, \varepsilon_c - \sigma_{c, r+1}) \end{aligned} \quad (12)$$

将 $\Delta A, \Delta C$ 代入 (5) 中, 则有:

$$\left\| \begin{pmatrix} \Delta C \\ \Delta C \cdot A + C \cdot \Delta A \\ \vdots \\ \Delta C \cdot A^{n-1} + (n-1)C \cdot A^{n-2} \cdot \Delta A \end{pmatrix} \right\|_F < \min(\tilde{\delta}_o, \varepsilon_o - \sigma_{o, r+1})$$

同样地, 对应于 (10) 有:

$$\begin{aligned} & \|(\Delta B \Delta A \cdot B + A \cdot \Delta B \quad 2A \cdot \Delta A \cdot B + A^2 \cdot \Delta B \quad \cdots \quad (n-1)A^{n-2} \cdot \Delta A \cdot B + \\ & \quad + A^{n-1} \cdot \Delta B)\|_F < \min(\tilde{\delta}_c \cdot \mu, (\varepsilon_c - \sigma_{c, r+1}) \cdot \mu) \end{aligned} \quad (13)$$

及

$$\left\| \begin{pmatrix} \Delta C \\ \Delta C \cdot A + C \cdot \Delta A \\ \vdots \\ \Delta C \cdot A^{n-1} + (n-1)C \cdot A^{n-2} \cdot \Delta A \end{pmatrix} \right\|_F < \min(\tilde{\delta}_o \cdot \mu, (\varepsilon_o - \sigma_{o, r+1}) \cdot \mu)$$

例5 利用例4的结果, 当 $n=10$ 时, 系统能控性的数值判断为: $(10, 10^{-5}, 0.00292, 0.00052)$. 又由例1得知, 当 W_c 中第一列的每个元有小扰动 $-1/2^9$ 时, 扰动后的 $\bar{W}_c$ 为奇异阵. 即这时能控子空间的维数 r 不具有鲁棒性. 据定理2, 必有 $\|W_c - \bar{W}_c\|_F \geq \delta_c$. 事实上, 可算出:

$$\|W_c - \bar{W}_c\|_F = \sqrt{10 \times (1/2^9)^2} = 0.00619 > 0.00292.$$

因而定理得到印证.

六、结 论

本文以奇异值分解理论为基础, 讨论了线性系统能控性、能观测性的数值判断, 并进行了相应的鲁棒性分析. 从而为利用数字计算机判断能控性、能观测性提供了可供参考的理论依据和算法.

数值计算的结果表明, 数值判断的概念有助于在使用计算机的条件下, 运用线性系统理论解决工程实际问题.

致谢 本工作过程中, 曾与高为炳先生、王振钧先生以及王纪文、王恩平同志进行过有益的讨论, 在此一并感谢.

参 考 文 献

- [1] 中国科学院数学研究所控制理论研究室编, 线性系统的能控性和能观测性, 科学出版社(1975), 86—104.
- [2] Thomas Kailath, Linear Systems, Prentice-Hall, Inc. (1980), 135—140.
- [3] Chen, C. T., Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart and Winston (1984), 168—226.
- [4] Rosenbrock, H. H., State-Space and Multivariable Theory, John Wiley and Sons, Inc. (1970), 72—73 及 231—238.
- [5] Stewart, G. W., Introduction To Matrix Computations, Academic Press (1973), 317—328.
- [6] Golub, G., Klema, V. and Stewart, G. W., Rank Degeneracy and Least Squares Problems, STAN-CS-75-559 (1976), 4—8.
- [7] Dongarra, J. J., Moler, C. B., Bunch, J. R., Stewart, G. W., LINPACK User's Guild, SIAM Philadelphia (1979), 11.1—11.22,

NUMERICAL DETERMINATION OF THE CONTROLABILITY AND OBSERVABILITY OF LINEAR SYSTEMS

Mao Jianqin

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

This paper discusses the determination of controlability and observability of the linear time invariable systems by using the digital computer. The numerical rank of a matrix is introduced and the method of finding the numerical rank by means of singular values is reviewed. Then the concept of numerical determination of the controlability and observability is developed and an implemental algorithm is given.

As an example, the alignment of a Schuler platform is discussed. According to the perturbational properties of singular values, the robustness of controlability and observability is also analysed.