

水轮发电机组表层温度 分布参数控制系统

邓 华

(江西工学院水利分院)

摘 要

在水轮发电机组表层温度控制问题中,其运动状态不仅依赖时间而且还依赖于空间变量,即温度场要求用分布参数来控制。对此,本文作了一些探讨,建立了数学模型,其主要公式都进行了数学推导,并导出了分布参数控制系统的传递函数。另外,对换热器的薄壁厚度问题进行了讨论,得出了一些有意义的推论。

一、引 言

水电站动力运行工程实践向人们提出了不同于近似的线性集中参数系统的一种控制系统,即分布参数控制系统。本文对水轮发电机组表层温度场这一线性常系数分布参数控制系统作了某些探讨,建立了数学模型^[1],主要公式都进行了严格的推导,对其误差问题进行了讨论,对工作参数进行了计算。

二、建立对象的数学模型及其推论

从实际的物理过程出发,考虑了均匀热流和非均匀热流两种情况。

(一) 均匀热流情况

设热交换器壁表面是一个无穷大的平板表面,如图1所示,即把它看成为单向传热问题。关于无限大区域的概念,是指物体的体积很大,而要研究的问题是在较短时间内,较小的范围内的变化规律。在图1中设 L 为无穷大。根据[2]均匀热流垂直辐射到平板表面,如图2所示,则可列出下列热传导方程:

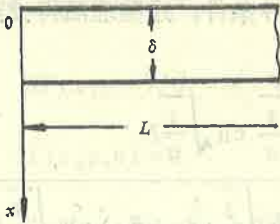


图 1

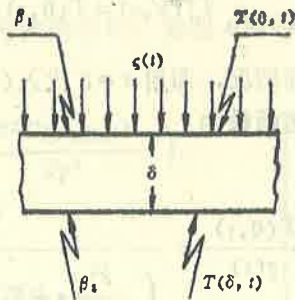


图 2

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad & \partial T(x, t) / \partial t = a \partial^2 T(x, t) / \partial x^2, \\
 & (0 < x < \delta, 0 < t < \infty) \\
 2) \quad & T(x, t)|_{t=0} = 0, \\
 3) \quad & q(t) = -k \partial T(x, t) / \partial x|_{x=0} + \beta_1 T(x, t)|_{x=0}, \\
 4) \quad & 0 = k \partial T(\delta, t) / \partial x|_{x=\delta} + \beta_2 T(\delta, t)|_{x=\delta}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设 $t=0$ 时温度为 0°C , 这不影响分析讨论问题的一般性. 2) 式为初始条件; 3)、4) 两式为边界条件. $q(t)$ 为控制量; $T(x, t)$ 为被控制量; k 为材料的热传导系数; a 为导热系数 ($a = k/c\rho$); c 为材料热容; t 为时间; δ 为金属板厚度; ρ 为材料密度; β_1 、 β_2 分别为受热面和非受热面的热交换系数.

1. 推导受热表面的传递函数

对(1)式中的 t 作拉氏变换 $t \rightarrow s$; $L[T(x, t)] \Rightarrow T(x, s)$, 则有

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad & sT(x, s) = a d^2 T(x, s) / dx^2, \\
 2) \quad & q(s) = -k dT(x, s) / dx|_{x=0} + \beta_1 T(x, s)|_{x=0}, \\
 3) \quad & 0 = k dT(\delta, s) / dx|_{x=\delta} + \beta_2 T(\delta, s)|_{x=\delta}, \\
 4) \quad & T(x, 0) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对(2)式中的 x 作拉氏变换 $x \rightarrow p$; $L[T(x, s)] \Rightarrow T(p, s)$. 由(2)式中 1) 式得

$$T(p, s) = \frac{pT(0, s)}{p^2 - \frac{s}{a}} + \frac{T'_x(0, s)}{p^2 - \frac{s}{a}}. \quad (3)$$

对(3)式 p 作反拉氏反变换再对 x 微分则有

$$T'_x(x, s) = T(0, s) \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} x + T'_x(0, s) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} x. \quad (4)$$

虑及非受热面情况, 即用 $x = \delta$ 代入(4)式, 再考虑边界条件, 经整理后得受热面分布参数系统的传递函数为

$$W(0, s) = \frac{T(0, s)}{q(s)} = \frac{\beta_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + k \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta}{\left(\frac{k^2}{a} s + \beta_1 \beta_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + k \sqrt{\frac{s}{a}} (\beta_1 + \beta_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta}. \quad (5)$$

2. 推导非受热表面的传递函数

用 $x = \delta$ 代入(4)式并考虑边界条件, 经计算得

$$T'_x(0, s) = \frac{-\sqrt{\frac{s}{a}} \left(\beta_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + k \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right) q(s)}{\left[\left(\frac{k^2}{a} s + \beta_1 \beta_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + k \sqrt{\frac{s}{a}} (\beta_1 + \beta_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right]}. \quad (1)$$

将上式和(5)式代入式(2)中3), 经整理得非受热面的传递函数

$$W(\delta, s) = \frac{T(\delta, s)}{q(s)} = \frac{k \sqrt{\frac{s}{a}}}{\left(\frac{k^2}{a} s + \beta_1 \beta_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + k \sqrt{\frac{s}{a}} (\beta_1 + \beta_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta}. \quad (6)$$

比较式(5)和式(6)两式可知, 受热面和非受热面的传递函数都是 s 的超越函数, 极点同零点异. 我们所讨论的问题是在定解条件中, 既有初始条件又有边界条件描述了空间域为有限时动态过程, 以及时间域趋于无穷时的稳态过程.

(二) 非均匀热流的情况

设在 $2L$ 的区间内为均匀辐射 q_1 , 在此区间之外有少量的热散失, 设为 q_2 , 故在

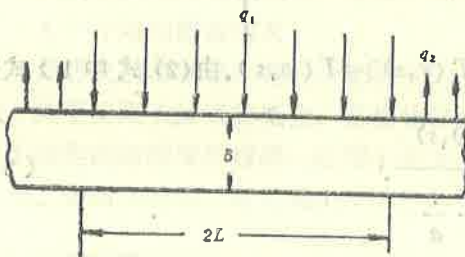


图 3

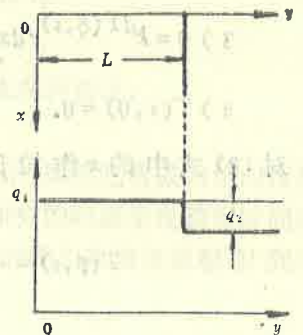


图 4 从金属板中央切开示意图

2L 区段之外, 热为 $q = q_1 - q_2$, 如图 3 所示。

假设从板的中央切开, 且考虑坐标 x 方向和 y 方向的变化, 如图 4 所示, 故可以列写出一个二维的热传导方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \\ T(x, y, 0) &= 0, \\ T(0, y, t) &= \frac{k}{\beta_1} \cdot \frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} + q(t)/\beta_1, \\ T(\delta, y, t) &= -\frac{k}{\beta_2} \cdot \frac{\partial T(\delta, y, t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \\ \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\infty} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中各参数的物理意义同前面式(1)中的参数一样。考虑坐标 y 方向变化, 式中 q 为 $q = q_1 u(y) - q_2 u(y-l)$, (且 $q_1 > q_2$)。对式(13)中的变量 t 作拉氏变换 $t \rightarrow s$, $L[T(x, y, t)] \Rightarrow T(x, y, s)$; 接着对 y 作拉氏变换 $y \rightarrow p$; 最后还要考虑 x 方向上的变化, 即把平板转动九十度角并对坐标变量 x 作拉氏变换 $x \rightarrow v$ 经运算整理得:

$$V(0, p, s) =$$

$$-P^2 \int_0^\delta \left[\frac{\beta_2}{k\alpha} \sin\alpha(\delta-\eta) + \cos\alpha(\delta-\eta) \right] U(\eta, s) d\eta + \frac{1}{k} \left(\frac{\beta_2}{k\alpha} \sin\alpha\delta + \cos\alpha\delta \right) (q_1 - q_2 e^{-PL})$$

$$P \left[\frac{\beta_1 + \beta_2}{k} \cos\alpha\delta + \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{k^2 \alpha} - \alpha \right) \sin\alpha\delta \right] \quad (8)$$

令上式分子为 $M(p)$, 分母为 $D(p)$

$$\text{即} \quad V(0, p, s) = M(p)/D(p) \quad (9)$$

$D(p)$ 就是其特征多项式, $D(p) = 0$, 则有 $p = 0$ 和 $\cos\alpha\delta \left[\frac{\beta_1 + \beta_2}{k} + \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{k^2 \alpha} - \alpha \right) \right. \\ \left. \tan\alpha\delta \right] = 0$ 。因此, 总共得到极点是 $p = 0$ 以及 $\alpha = \pm \alpha_1 \pm \frac{n\pi}{\delta} (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$ 。它的根

不是有限个而是无穷多个, 对式(8)用留数法^[3]求 p 的反拉氏变换,

$$p = p_0 = 0, \alpha = \lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{p^2 - \frac{s}{a}} = j \sqrt{\frac{s}{a}},$$

$$T_0(0, y, s) = \frac{\left(\beta_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + jk \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right) [q_1(s)u(y) - q_2(s)u(y-L)]}{\left(\frac{k^2}{a} s + \beta_1 \beta_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + jk \sqrt{\frac{s}{a}} (\beta_1 + \beta_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta} \quad (10)$$

$p = p_1$ 时, 在忽略 $\beta_1 \beta_2$ 项情况下 ($\because \beta_1 \beta_2 \approx 10^{-8}$) 得

$$T_1(0, y, s) = \frac{\left(\frac{\beta_2}{k\alpha_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \delta + 1 \right) [e^{-p_1(y+L)} - e^{-p_1(y-L)}] q_2(s)}{k\delta \left[\frac{\delta(\beta_1 + \beta_2) + k}{k\alpha_1 \delta} \operatorname{tg} \alpha_1 \delta + 1 \right] \left(\frac{s}{a} + \alpha_1^2 \right)} \quad (11)$$

用留数法求系数, 继续进行推导直到 n , 前面已推出有 $p_n = -\sqrt{\frac{s}{a} + \left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta} \right)^2}$,

同理求得

$$T_n(0, y, s) = \frac{\left[\frac{\beta_2}{k(\alpha_1 + n\pi/\delta)} \operatorname{tg} \left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta} \right) \delta + 1 \right] [e^{-p_n(y+L)} - e^{-p_n(y-L)}]}{k\delta \left[\frac{\delta(\beta_1 + \beta_2) + k}{k(\alpha_1 + n\pi/\delta) \delta} \operatorname{tg} \left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta} \right) \delta + 1 \right] \left[\frac{s}{a} + \left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta} \right)^2 \right]} q_2(s) \quad (12)$$

至此求得总的结果是 $T(0, y, s) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(0, y, s)$ 并让 $y=0$ 则有

$$T(0, 0, s) = \frac{\left(\beta_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + jk \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right) q_1(s)}{\left(\frac{k^2}{a} s + \beta_1 \beta_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta + jk \sqrt{\frac{s}{a}} (\beta_1 + \beta_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta} + \frac{\left(\frac{\beta_2}{k\alpha_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \delta + 1 \right) \left[e^{-\sqrt{\frac{s}{a} + \alpha_1^2} L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a} + \alpha_1^2} L} \right] q_2(s)}{k\delta \left[\frac{\delta(\beta_1 + \beta_2) + k}{k\alpha_1 \delta} \operatorname{tg} \alpha_1 \delta + 1 \right] \left(\frac{s}{a} + \alpha_1^2 \right)}$$

+ ...

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\beta_2}{k(\alpha_1 + n\pi/\delta)} \operatorname{tg}\left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta}\right) \delta + 1 \right] \left[e^{-\sqrt{\frac{s}{a} + \left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta}\right)^2} L} \right. \\
 & \left. - e^{-\sqrt{\frac{s}{a} + \left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta}\right)^2} L} \right] q_2(s) \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k\delta \left[\frac{\delta(\beta_1 + \beta_2) + k}{k\left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta}\right)\delta} \operatorname{tg}\left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta}\right) \delta + 1 \right] \left[\frac{s}{a} + \left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta}\right)^2 \right]}{k\left(\alpha_1 + \frac{n\pi}{\delta}\right)\delta} \quad (13)
 \end{aligned}$$

考虑到非受热表面情况有 $\beta_2 = 0$, 同时让 $\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \approx \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \approx 1$, 忽略 β_1, β_2 的项, 对式(13)化简得非受热面传递函数

$$W(0,0,s) = \frac{T(0,0,s)}{q(s)} = \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{\beta_1}{k\delta}} L}}{2\beta_1 \left(\frac{k\delta}{a\beta_1} s + 1 \right)} \quad (14)$$

三、误差计算

设流入金属板内的热流为 $q(t)$, 辐射热流为 $q_1(t)$, 则有

$$q(s) = q_1(s) - \beta_1 T(0,s) - \beta_2 T_2(\delta,s), \quad (15)$$

设 T 为板表面温度。对分布参数控制系统的数学模型与线性近似的数学模型的误差计

算, 经计算知简单的数学模型 $q(t) = c\rho\delta \frac{dT}{dt}$ 不能满足实际工况要求。在此基础上选用

了受热面和非热面温度平均值的微分值来表示, 即

$$q(t) = c\rho\delta \frac{d}{dt} \left[\frac{T(0,t) + T(\delta,t)}{2} \right]. \quad (16)$$

相应 $T(0,s)$ 、 $T(\delta,s)$ 和 (16) 式的均方误差分别记为 $\Delta 1(\omega)$ 、 $\Delta 2(\omega)$ 、 $\Delta 3(\omega)$ 。经计算并考虑非受热面 $\beta_2 = 0$ 的情况, 可得

$$\Delta 1(\omega) = \sqrt{\left| \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta - \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right|^2 / \left| \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right|^2}, \quad (17)$$

$$\Delta 2(\omega) = \sqrt{\left| \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta - \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right|^2 \left| \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right|^2}, \quad (18)$$

$$\Delta 3(\omega) = \sqrt{\left| \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \left(1 + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right) \right|^2 \left| \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} \delta \right|^2}. \quad (19)$$

根据[4]理论有

$$\sqrt{\frac{s}{a}} \delta = \sqrt{\frac{\omega}{a}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \delta = \sqrt{\frac{\omega}{a}} (0.707 + j0.707) \delta. \quad (20)$$

在板厚度、工作频率给定情况下，可计算出上述各种情况的均方误差。原始参数是： $a = 1.568 (\text{cm}^2/\text{sec})$ ； $\delta = 1 (\text{cm})$ ； $k = 0.945 (\text{cal}/\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot ^\circ\text{C})$ ； $\beta_1 = 5.62 \times 10^{-4} (\text{cal}/\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot ^\circ\text{C})$ 。

$\Delta n(\omega) \backslash \omega'$	0.02	0.10	0.20	0.30
$\Delta 1(\omega)$	0.00028	0.0051	0.026	0.062
$\Delta 2(\omega)$	0.00020	0.0030	0.014	0.031
$\Delta 3(\omega)$	0.00013	0.0019	0.007	0.015

比较它们的误差情况可知，第三种情况最好，已能满足实际工作的需要，即利用受热面和非受热面的温度平均值的微分值来表示流入板内热流量 $q(t)$ 是符合物理实际的。故得出结论：

(1) 在 $q(t) = c\rho\delta \frac{dT}{dt}$ (T 为板面温度) 不能表达真实的物理特性情况下，利用式(16)来表示 $q(t)$ 的物理特性。这是一种简便、有效的方法。它的均方误差在其工作频率范围内最小，这一结论可帮助人们选用“PD”调节规律。

(2) 随着板厚度 δ 的增加 ($\because \omega' = 0.707 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \delta$) 其误差显著增大。因此，热交换器板壁不宜厚，否则会降低工作频率。

(3) $\beta_2 = 0$ 是因为水轮发电机组在额定工况 (多为此种工作状态) 时，可以看成是均匀温度场。因此，在额定工况条件下，让 $\beta_2 = 0$ ，是与实际运行情况相吻合的。

参 考 文 献

- [1] 钱学森、宋健，工程控制论，科学出版社，(1980)，366—436。

- [2] 天津大学、同济大学等三校编著, 传热学, 中国建筑工业出版社, (1980), 209—232.
- [3] (日) 绪方胜彦著, 卢伯英等三人译, 现代控制工程, 科学出版社, (1978), 13—34, 361—400.
- [4] 钟玉泉编, 复变函数论, 人民教育出版社, (1983), 49—60.

THE DISTRIBUTED PARAMETER CONTROL SYSTEM OF THE SURFACE TEMPERATURE OF WATER TURBINE GENERATOR UNIT

Deng Hua

(Hydraulic Engineering Branch of Jiang Xi Institute of Technology, Nanchang)

Abstract

The mathematical model of the system is established in the form of transfer function. The error of the model is discussed.