第3卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol.3, No.1
1886年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1986

Riccati 方程的方块脉冲函数近似解法

邢 继 祥
（哈尔滨工业大学）

提　要

已知线性系统最优控制规律的选择以及最优滤波器的设计均要求解 Riccati 方程. 本文应用方块脉冲函数的性质到解该微分方程，得到了分段恒定解答的递推算法. 特别是证明了算法的收敛性和数值稳定性.

一、引言与方块脉冲函数的性质

〔2〕曾初步探讨过一问题. 本文详细推得的递推算法公式，证法很简单. 不仅证明了具有二阶精度的收敛性，而且证明了具有恒稳性的数值稳定性. 算例表明算法方便且精度较高.

$t\in[0,T)$ 上m个分量的方块脉冲函数表达式为

$$\pi_k(t)=\begin{cases}1 & (K-1)T/m\le t<KT/m,\\ 0 & 其它 \qquad K=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{1}$$

〔2〕曾详细列出了方块脉冲函数的前三条性质，本文仍然使用：性质一的（2）与（3）式表明了脱关性与正交性；性质二的（4）与（5）式表明可积函数若有近似展式 $C(t)\cong\sum_{K=1}^{m}\overline{C}_k\pi_k(t)$，则系数$\overline{C}_k$ 是 $C(t)$ 在第K个子区间上的平均值；性质三的（6）、（7）与（8）三式指出了 m 段方块脉冲函数列向量 $\pi_{(m)}(t)=[\pi_1(t),\cdots,\pi_m(t)]^T$ 的正向与反向积分的运算公式.（参〔2〕）

性质四[4] 若 $x(0)$ 已知且有（近似）展开式

$$x(t)\cong\sum_{K=1}^{m}\overline{x}_k\pi_k(t)=X^T_{(m)}\pi_{(m)}(t),$$

本文于 1984 年12月12日收到，1985年9月18日收到修改稿.

$$\dot{x}(t) \cong \sum_{K=1}^{m} \tilde{x}_k \pi_k(t) = \dot{X}^{\tau}_{(m)} \pi_{(m)}(t),$$

则有近似式

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{T}{2m}\tilde{x}_1 + x(0), \\ \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \dfrac{T}{2m}\left(\tilde{x}_{k+1} + \tilde{x}_k\right), \\ K = 1,2,\cdots,m-1. \end{cases} \tag{9}$$

若 $x(T)$ 已知，则有近似式

$$\begin{cases} \bar{x}_m = x(T) - \dfrac{T}{2m}\tilde{x}_m, \\ \bar{x}_k = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{T}{2m}\left(\tilde{x}_{k+1} + \tilde{x}_k\right), \\ K = m-1, \cdots, 2, 1. \end{cases} \tag{10}$$

证 （只证（10）式）.

因为 $\int_T^t \dot{x}(\tau)d\tau = x(t) - x(T)$ 将此代入已知展式有

$$\int_T^t \dot{X}^{\tau}_{(m)} \pi_{(m)}(s)ds = [X^{\tau}_{(m)} - (x(T),\cdots,x(T))]\pi_{(m)}(t)$$

由性质三的（8）式可得

$$-\frac{T}{m}[\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_m]H^{\tau}\pi_{(m)}(t)$$

$$=[(\bar{x}_1 - x(T)),\cdots,(\bar{x}_m - x(T))]\pi_{(m)}(t).$$

比较上式系数并稍加消元即得证（10）式.

二、Riccati微分方程的递推算法

时变系统 $$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{11}$$

二次性能指标

$$J = \frac{1}{2}x^{\tau}(T)\,sx(T) + \frac{1}{2}\int_0^T (u^{\tau}Ru + x^{\tau}Qx)dt, \tag{12}$$

则最优反馈控制规律为

$$u^0(t) = -R^{-1}(t)B(t)P(t,T)x(t), \tag{13}$$

而 $P(t,T)$ 为 Riccati 方程

$$\dot{P}=-PA-A^{\tau}P-Q+PBR^{-1}B^{\tau}P, \tag{14}$$

满足 $P(T,T)=S$ 的正半定（对称）解.

今考虑（14）式的递推算法公式.

〔1〕〔5〕指出，可借助于线性微分方程组

$$\begin{bmatrix}\dot{z}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}=F(t)\begin{bmatrix}z(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}z(T)\\ y(T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n\\ -S\end{bmatrix} \tag{15}$$

来求（14）的解.

$$P(t)=-y(t)z^{-1}(t), \tag{16}$$

其中

$$F(t)=\begin{bmatrix}A(t) & B(t)R^{-1}(t)B^{\tau}(t)\\ Q(t) & -A^{\tau}(t)\end{bmatrix}. \tag{17}$$

$z(t)$、$y(t)$ 为 $n\times n$ 矩阵，且 $z(t)$ 可逆[5].

今记 $F(t)$、$z(t)$、$y(t)$、$\dot{z}(t)$、$\dot{y}(t)$ 的方块脉冲函数展开式系数分别为

$$\overline{F}_k=\begin{bmatrix}\overline{A}_k & \overline{(BR^{-1}B^{\tau})}_k\\ \overline{Q}_k & -\overline{A}_k^{\tau}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\overline{z}_k\\ \overline{y}_k\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\tilde{z}_k\\ \tilde{y}_k\end{bmatrix}. \tag{18}$$

将（18）式代入（15）式再由性质一可得

$$\begin{bmatrix}\tilde{z}_k\\ \tilde{y}_k\end{bmatrix}=\overline{F}_k\begin{bmatrix}\overline{z}_k\\ \overline{y}_k\end{bmatrix}\quad K=1,2,\cdots,m. \tag{19}$$

对（15）式的各列应用公式（10），然后将各列再合写在一起，并将（19）式代入可得

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\overline{z}_m\\ \overline{y}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z(T)\\ y(T)\end{bmatrix}-\dfrac{T}{2m}\overline{F}_m\begin{bmatrix}\overline{z}_m\\ \overline{y}_m\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}\overline{z}_k\\ \overline{y}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{z}_{k+1}\\ \overline{y}_{k+1}\end{bmatrix}-\dfrac{T}{2m}\overline{F}_{k+1}\begin{bmatrix}\overline{z}_{k+1}\\ \overline{y}_{k+1}\end{bmatrix}-\dfrac{T}{2m}\overline{F}_k\begin{bmatrix}\overline{z}_k\\ \overline{y}_k\end{bmatrix},\\ \qquad K=m-1,\cdots,2,1\end{cases} \tag{20}$$

整理上式并注意（15）式的边界条件可得

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\overline{z}_m\\ \overline{y}_m\end{bmatrix}=\left[I_{2n}+\dfrac{T}{2m}\overline{F}m\right]^{-1}\begin{bmatrix}I_n\\ -S\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}\overline{z}_k\\ \overline{y}_k\end{bmatrix}=\left[I_{2n}+\dfrac{T}{2m}\overline{F}_k\right]^{-1}\left[I_{2n}-\dfrac{T}{2m}\overline{F}_{k+1}\right]\begin{bmatrix}\overline{z}_{k+1}\\ \overline{y}_{k+1}\end{bmatrix},\\ \qquad K=m-1,\cdots,2,1.\end{cases} \tag{21}$$

（20）式特别是（21）式即为（15）式的递推公式. 从而可得（14）式的分段恒定解答是

$$\overline{P}_k = -\overline{y}_k \cdot \overline{z}_k^{-1}, \tag{22}$$

$$P(t) \cong \sum_{K=1}^{m} \overline{P}_k \pi_k(t). \tag{23}$$

而最优反馈控制规律为（用性质一）

$$u^0(t) \cong -\sum_{K=1}^{m} \overline{(R^{-1}B^T)}_k \ \overline{P}_k \ \overline{x}_k \pi_k(t). \tag{24}$$

显然反馈增益矩阵为

$$K(t) \cong \sum_{K=1}^{m} \overline{(R^{-1}B^{\tau})}_k \ \overline{P}_k \ \pi_k(t).$$

三、例 题[2][3]

$$\dot{x} = tx(t) + u(t), \quad J = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]dt,$$

求最优控制函数 $u^0(t)$ 的分段恒定综合形式.

解 由于 $T=1$，$A(t)=t$，$B(t)=R(t)=Q(t)=1$，$S=0$，而 $F(t)=\begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}$.

令取 $m=4$，则 $[\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3\ \overline{A}_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$

从而由（18）式得

$$\overline{F}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad \overline{F}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \quad \overline{F}_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}, \quad \overline{F}_4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{7}{8} \end{pmatrix},$$

代入（21）式有

$$\begin{bmatrix} \overline{z}_4 \\ \overline{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{71}{64} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{57}{64} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_4} \begin{bmatrix} 0.8906 \\ -0.125 \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_4 = \det\left(I_2 + \frac{1}{8}\overline{F}_4\right)$.

故由(22)式得 $\overline{P}_4=-\overline{y}_4/\overline{z}_4=0.125/0.8906=0.1404$.

再由(21)与(22)式可得

$$\overline{P}_3=0.3706/0.7769=0.4770.$$

同理 $\overline{P}_2=0.7799,\qquad \overline{P}_1=0.9442$.

最后由(23)、(24)式可得反馈增益阵及 Riccati 方程的解为

$$K(t)=P(t)\cong 0.9442\,\pi_1(t)+0.7799\,\pi_2(t)+0.4770\,\pi_3(t)+0.1404\,\pi_4(t).$$

此结果与〔2〕、〔3〕相差甚小，精度令人满意。

四、递推算法的误差估计收敛性与稳定性

记步长 $h=\dfrac{T}{m}$，$t_k=Kh$，$W(t)=\begin{bmatrix} z(t)\\ y(t)\end{bmatrix}$，

设 $W(t)$，$F(t)$ 对 t 二次连续可微。

由(20)式有

$$\frac{1}{h}\left(\overline{W}_{k+1}-\overline{W}_k\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{F}_{k+1}\overline{W}_{k+1}+\overline{F}_k\overline{W}_k\right). \tag{25}$$

对(25)左端在 $t=t_k$ 作幂次展开并由性质二有

$$\frac{1}{h}\left(\overline{W}_{k+1}-\overline{W}_k\right)=\frac{1}{h^2}\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}}W(t)dt-\int_{t_{k-1}}^{t_k}W(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{h^2}\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[W(t_k)+\dot{W}(t_k)(t-t_k)+\frac{\ddot{W}(t_k)}{2!}(t-t_k)^2+0(h^3)\right]dt\right.$$

$$\left.-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[W(t_k)+\dot{W}(t_k)(t-t_k)+\frac{\ddot{W}(t_k)}{2!}(t-t_k)^2+0(h^3)\right]dt\right\}$$

$$=\frac{1}{h^2}\left\{W(t_k)h+\frac{h^2}{2}\dot{W}(t_k)+\frac{h^3}{6}\ddot{W}(t_k)+h0(h^3)\right.$$

$$\left.-W(t_k)h+\frac{h^2}{2}\dot{W}(t_k)-\frac{h^3}{6}\ddot{W}(t_k)+h0(h^3)\right\}=\dot{W}(t_k)+0(h^2).$$

对(25)式右端在 $t=t_k$ 作幂次展开并利用上式结果可得

$$\frac{1}{2}\left(\overline{F}_{k+1}\overline{W}_{k+1}+\overline{F}_k\overline{W}_k\right)=F(t_k)W(t_k)+0(h^2).$$

于是得差分方程(25)与原方程 $\dot{W}=FW$ 在 t_k 点的“差”：

$$E=\left\{\frac{1}{h}\left(\overline{W}_{k+1}-\overline{W}_k\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{F}_{k+1}\overline{W}_{k+1}+\overline{F}_k\overline{W}_k\right)\right\}-\left\{\dot{W}-FW\right\}_{t_k}$$

$$=\{\dot{W}(t_k)+0(h^2)-F(t_k)W(t_k)+0(h^2)\}-\{\dot{W}(t_k)-F(t_k)W(t_k)\}$$

$$=0(h^2).$$

可见，截断误差 $E=0(h^2)$，当 $h=\frac{T}{m}\to 0$ 时，$E\to 0$，说明当 $m\to\infty$ 时递推公式(20)或(21)式收敛，且具有2阶精度.

而且，算法具有好的稳定性：是恒稳的或稳定域包含了全左半平面[6][7].

事实上，可对模型方程

$$\dot{W}=\mu W,\ \mu=\alpha+i\beta,\ \mathrm{Re}\mu=\alpha<0$$

用(25)式有

$$\overline{W}_{k+1}-\overline{W}_k=\frac{1}{2}\mu h(\overline{W}_{k+1}+\overline{W}_k).$$

即差分方程为

$$\overline{W}_{k+1}=\frac{1+\frac{1}{2}\mu h}{1-\frac{1}{2}\mu h}\overline{W}_k.$$

为使其特征方程的根满足 $|\lambda(\mu h)|<1$

只须

$$\left|\frac{1+\frac{1}{2}\mu h}{1-\frac{1}{2}\mu h}\right|<1.$$

注意 $h>0$，$\mathrm{Re}\,\mu=\alpha<0$，故 μh 在复平面左半面上时，上式均成立．从而证得恒稳性．

五、结 束 语

方块脉冲函数性质非常简单、直观．其逼近函数是最优平方逼近[2]．本文将其用于线性时变系统的Riccati微分方程的求解，递推公式(21)式是显式单步恒稳型的，收敛且具有较高精度，便于应用。

参 考 文 献

〔1〕 Brian D. O. Anderson, John B. Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, (1971), (中译本，尤云程译，科学出版社，1982).

〔2〕 邢继祥等，方块脉冲函数用于非线性系统的分析以及最优控制的综合，自动

化学报，11，2，(1985)，175－183.
〔3〕徐宁寿等，方块脉冲函数用于线性时变系统的分析和最优控制，自动化学报，8,1，(1982)，55－67.
〔4〕Sannuti, B. E., Analysis and Synthesis of Dynamic Systems Via Block－Pulse Functions, Proc. IEE, 124, (1977), 569－571.
〔5〕杨簏引等，电子计算机应用数学，冶金工业出版社，(1979).
〔6〕冯康等，数值计算方法，国防工业出版社，(1978).
〔7〕复旦大学数学系计算数学教研室，常微数值分析，(1982).

SOLUTION OF THE RICCATI EQUATION VIA BLOCK-PULSE FUNCTIONS

Xing Jixiang

(Harbin Institute of Technology)

Astract

As we know, the selection of an optimal control law and the design of optimal filters require the solving of a Riccati equation for the linear systems. In this paper, by applying the properties of the block－pulse functions to tne solution of the Riccati differential epuation, the recursive algorithms of the piecewise constant solutions are obtained. The convergence and stability are proved.