第3卷 第2期
1986年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.3, No.2
June, 1986

抛物型边界点控系统的最优控制与闭环综合

陈叔平
（浙江大学）

摘要

本文讨论一类带有边界点状控制的抛物型系统在二次性能指标下的最优控制问题，证明了最优控制的存在唯一性，建立了状态反馈公式，并给出了求解反馈算子的一种新的途径。

一、引言

设$\Omega\subset R^n$是一有界开域，其边界$\Gamma=\partial\Omega$充分光滑并局部地位于Ω的一侧。又设$\widetilde{A}$是Ω上的二阶自共轭椭圆型微分算子

$$\widetilde{A}=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+c(x). \tag{1.1}$$

系数a_{ij}及c在$\overline{\Omega}$上充分光滑且满足以下条件:

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ 1\le i,j,\le n;\ c(x)\ge 0,\quad \forall x\in\overline{\Omega}, \tag{1.2}$$

$$\exists\eta_1>0,\text{使}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\eta_1|\xi|^2,\quad\forall\xi\in R^n,\ x\in\overline{\Omega}. \tag{1.3}$$

考虑抛物型边界点控系统:

$$(I)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}+\widetilde{A}y=0 & (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\\ y=v(t)\delta(b-x) & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma,\\ y(0,x)=h(x) & x\in\Omega.\end{cases}$$

价值函数为

$$J(v)=\langle Qv,v\rangle_U+\lambda\langle C(y(T;v)-z_d),\ y(T;v)-z_d\rangle_Z, \tag{1.4}$$

其中$Z=L^2(\Omega)$，$U=L^2(0,T)$，h、$z_d\in Z$是给定的函数，$v\in U$是控制函数，$\delta(b-\cdot)$是Γ上支点在b的Dirac测度，$Q\in L(U)$、$C\in L(Z)$是两个自共轭正定算子，λ是给定

本文于1983年10月24日收到，1985年8月20日收到修改稿。

的实数.

最优控制问题是要寻找 $\hat{u}\in U$，使系统(*I*)对应于 $\hat{u}$ 的解 $\hat{y}=y(\cdot;\hat{u})$ 在终止时刻的值 $y(T;\hat{u})\in Z$，且使泛函（1.4）达到极小，此问题简称为问题(*P*).

当 $\lambda>0$ 且空间维数 $n\leq 3$ 时，文献[1～2]曾讨论过这个问题，主要解决最优控制的存在唯一性和容许控制集的结构. 文献[3]对抽象抛物型边界控制问题作了研究，重点放在最优控制的正则性问题上. 本文对一般情形进行讨论. 在证明最优控制的存在唯一性、线性状态反馈律的同时，给出了反馈算子的新的求解方法.

二、最优控制的存在唯一性

系统(*I*)一般不存在经典解. 因此首先需要指明它的解的意义. 文[1]是用“转置”的方法来定义它的弱解. 本文将给出解的另一种形式，以便用半群的方法来讨论. 为此先作一些准备.

在本文中，$H^s(\Omega)$ 和 $H_0^s(\Omega)(s>0)$ 是通常的Sobolev空间的记号，设 X 和 Y 是两个Banach空间，那末 X 的对偶空间记为 X'；$L(X,Y)$ 是从 X 到 Y 的线性有界算子按通常的算子运算和算子范数所成的Banach代数，$L(X)\overset{\text{def}}{=}L(X,X)$；$Y\subset X$ 表示 Y 连续稠密地嵌入 X；$D(A)$ 和 $R(A)$ 则分别表示线性算子 A 的定义域和值域.

记 $V=H_0^1(\Omega)$，$Z=L^2(\Omega)$. 令 $Z=Z'$，则有 $V\subset Z\subset V'$. 给出 $V\times V$ 上的连续双线性泛函：

$$a(\varphi,\phi)=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_j}dx+\int_\Omega c(x)\varphi(x)\phi(x)dx. \qquad (2.1)$$

由条件(1.2)、(1.3)可知，$a(\cdot,\cdot)$ 是对称的，且满足：

$$\exists\eta_2>0,\ 使 a(\varphi,\varphi)\geq\eta_2\|\varphi\|_V^2,\ \forall\varphi\in V. \qquad (2.2)$$

于是有以下熟知的结果（见[4]）.

引理2.1　(i) 双线性泛函(2.1)导出算子 $\Lambda\in L(V,V')$，满足 $a(\varphi,\phi)=\langle\Lambda\varphi,\phi\rangle_{V',V}$ $\forall\varphi,\phi\in V$，且 $\Lambda^{-1}\in L(V',V)$. (ii) 令 $A=\Lambda|_{D(A)}$，$D(A)=\{\varphi\in V;\ \Lambda\varphi\in Z\}$，则 A 是 Z 上的正定自共轭算子，$-A$ 生成 Z 上的 C_0 类算子半群 e^{-At}. (iii) 当 $f\in Z$ 时，泛函方程 $A\varphi=f$ 等价于Dirichlet问题 $\widetilde{A}\varphi=f$，$x\in\Omega$；$\varphi|_\Gamma=0$，这里 $\widetilde{A}$ 是(1.1)所定义的微分算子.

利用正自共轭算子的谱分解易知：幂 A^α 对任何实数 α 都有意义，对 $\alpha>0$，定义 $V^\alpha=D(A^{\alpha/2})$，$V^0=Z$. A^α 赋以范数 $\|\varphi\|_\alpha\overset{\text{def}}{=}\|A^{\alpha/2}\varphi\|_Z$ 后成为Hilbert空间，记其对偶空间 $(V^\alpha)'=V^{-\alpha}$，于是当 $\alpha>\alpha'$ 时就有 $V^\alpha\subset V^{-\alpha}$. 再由椭圆算子的正则性结果和空间插

值公式（见〔5〕）可知，当 $\alpha\neq k+\dfrac{1}{2}$ 时（k 是整数），V^α 是 $H^\alpha(\Omega)$ 的闭子空间，且 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_{H^\alpha(\Omega)}$ 是 V^α 上的两个等价范数.

当 Ω 有界时，$V\subset Z$ 是紧嵌入. 我们引用以下的半群扩张结果，其证明见〔6〕.

引理 2.2 设 V 紧嵌入 Z，A 由三重结构 (V,Z,α) 导出，e^{-At} 是由 $-A$ 生成的半群，那末，(i) 对任何 $\alpha>0$，Z 上的半群 e^{-At} 可扩张为 $V^{-\alpha}$ 上的 C_0 类半群（仍记为 e^{-At}）. (ii) 对 $t>0$，e^{-At} 将 $V^{-\alpha}$ 映入 Z，若视 $e^{-At}\in L(V^{-\alpha},Z)$，则有估计 $\|e^{-At}\|_{L(V^{-\alpha},Z)}\leq \mathrm{const}/t^\alpha$. 而它的对偶算子为 $(e^{-At})^*=e^{-At}|_Z\in L(Z,V^\alpha)$，其范数仍满足同一估计式. (iii) 若 $f\in L^2(0,T;V^{-\alpha})$，则 $\int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds\in L^2(0,T;V^{-\alpha+2})\cap C(0,T;V^{-\alpha+1})$. 这里的积分理解为 $V^{-\alpha}$ 上的 Bochner 积分.

以下固定 $\beta=\dfrac{n}{2}+1+\varepsilon$，$n$ 是空间的维数，$\varepsilon>0$ 充分小. 由 Sobolev 空间的迹定理和嵌入定理(见〔5〕)可知，对固定的 $b\in\Gamma$，由 $\varphi\to\dfrac{\partial}{\partial\nu_A}\varphi(b)$ 确定了 $H^\beta(\Omega)$ 上的连续线性泛函，其中 $\dfrac{\partial}{\partial\nu_A}\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\cos(\vec{\nu},x_j)\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_\Gamma$，$\vec{\nu}$ 是 Γ 上的外法线方向，已知 V^β 是 $H^\beta(\Omega)$ 的闭子空间，因此可定义算子 $B\in L(\mathbf{R}^1,V^{-\beta})$ 如下

$$\langle Bv,\varphi\rangle_{V^{-\beta},V^\beta}=v\frac{\partial}{\partial\nu_A}\varphi(b),\quad \forall v\in\mathbf{R}^1,\ \varphi\in V^\beta. \tag{2.3}$$

利用算子 B，可给出 (I) 的解的一个表达式

$$y(t;v)=e^{-At}h+\int_0^t e^{-A(t-s)}Bv(s)ds. \tag{2.4}$$

积分是 $V^{-\beta}$ 上的 Bochner 积分. 容易验证此表达式与文〔1〕中用"转置"方法定义的弱解是一致的.（2.4）对初值 $h\in V^{-\alpha}(\alpha>0)$ 也适用，根据(2.4)式，泛函（1.4）可以写成

$$J(v)=\langle Qv,v\rangle_U+\lambda\langle C(Gv+e^{-AT}h-z_d),\ Gv+e^{-AT}h-z_d\rangle_Z,$$

其中算子 G 定义为

$$G:\ v\longmapsto Gv=\int_0^T e^{-A(T-\sigma)}Bv(\sigma)d\sigma\ . \tag{2.5}$$

显然 $G\in L(U,V^{-\beta})$. 而引理2.2指出 $e^{-AT}h\in Z$，故 $y(T;U)\in Z$ 当且仅当 $Gv\in Z$. 仿照文〔1〕，引入函数空间 $U^T=\{v\in U;y(T;v)\in Z\}=\{v\in U;Gv\in Z\}$. 另一方面，若记 U^c 为 U 中在〔0, T)中有紧支集的元素全体，即 $U^c=\{v\in U$；存在 $\varepsilon=\varepsilon(v)>0$，使 $v(t)=0$，a.e. $t\in[T-\varepsilon,T]\}$，则 $U^c\subset U^T$ 且 $\overline{U^c}=U$. 由此立即可以推出

引理 2.3 (2.5)定义的 G 是 U 到 Z 的稠定闭算子.

最优控制问题现在可表述为

(P)：寻找 $\hat{u}\in U^{\Gamma}$，使 $J(\hat{u})=\inf J(v)$，$v\in U^{\Gamma}$．

定理 2.4　在问题(P)中，若 $W\overset{\text{def}}{=}Q+\lambda G^*CG$ 正定，则最优控制存在唯一，并且由下式给出

$$\hat{u}=-\lambda(GW^{-1})^*C(e^{-AT}h-z_d).\tag{2.6}$$

定理2.4可由以下两个引理直接推出

引理 2.5　设 U、Z 是两个 Hilbert 空间，置 $U=U'$，$Z=Z'$．又设 $Q\in L(U)$、$C\in L(Z)$ 是两个正定自共轭算子，G 是 U 到 Z 的稠定闭算子．给定实数 $\lambda\neq 0$，若 $W=Q+\lambda G^*CG$ 是正定的，则有

(i)　$G(GW^{-1})^*\in L(Z)$ 并且是自共轭的．

(ii)　$E\overset{\text{def}}{=}I-\lambda CG(GW^{-1})^*\in L(Z)$，且有 $Q(GW^{-1})^*=G^*E$．

证　根据题设条件，存在 $W^{-1}\in L(U)$ 并且是自共轭的，此外，$Q^{1/2}$ 和 $C^{1/2}$ 也都存在并且是自共轭正定的，因而它们还分别是 U 到自身与 Z 到自身的同构．若定义 $M=C^{1/2}GQ^{-1/2}$，则 M 是 U 到 Z 的稠定闭算子且 $M^*=Q^{-1/2}G^*C^{1/2}$，于是有 $W=Q^{1/2}(I+\lambda M^*M)Q^{1/2}$，$W^{-1}=Q^{-1/2}(I+\lambda M^*M)^{-1}Q^{-1/2}$．

由于 $R(W^{-1})=D(G^*CG)\subseteq D(G)$，故 GW^{-1} 是全定义的闭算子．根据闭图像定理可知 $GW^{-1}\in L(U,Z)$，从而 $(GW^{-1})^*\in L(Z,U)$．为证 $G(GW^{-1})^*\in L(Z)$，必须且只需证明 $R((GW^{-1})^*)\subseteq D(G)$．而这又等价于证明对每一 $z\in Z$，存在收敛于它的序列 $\{z_n\}$ 满足 $(GW^{-1})^*z_n\in D(G)$，且使得 $\{\|G(GW^{-1})^*z_n\|_Z\}$ 为有界集．

因为 G^* 也是稠定的，故对 $z\in Z$，存在 $\{z_n\}\subset D(G^*)\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z$．而对 $z_n\in D(G^*)$，$G(GW^{-1})^*z_n=(GW^{-1})G^*z_n$ 有意义，故 $(GW^{-1})^*z_n\in D(G)$．再由稠定闭算子的极分解(见[7])知：存在非负自共轭算子 T 和部分等距算子 S，满足 $T^2=M^*M$，$M=ST$，$M^*=TS^*$．当 $\lambda\neq 0$ 时 $T^2(I+\lambda T^2)^{-1}$ 显然是有界的．因此令 $z_n'=C^{-1/2}z_n$ 就得

$$\begin{aligned}\|G(GW^{-1})^*z_n\|&=\|C^{-1/2}C^{1/2}GW^{-1}G^*C^{1/2}z_n'\|\\&=\|C^{-1/2}M(I+\lambda M^*M)^{-1}M^*z_n'\|\\&=\|C^{-1/2}ST(I+\lambda T^2)^{-1}TS^*z_n'\|\\&=\|C^{-1/2}ST^2(I+\lambda T^2)^{-1}S^*z_n'\|\\&\leq\|C^{-1/2}\|\cdot\|T^2(I+\lambda T^2)^{-1}\|\cdot\|z_n'\|.\end{aligned}$$

因为 $z_n'\to C^{-1/2}z$，故 $\{\|z_n'\|\}$ 有界．从上式知 $\{\|G(GW^{-1})^*z_n\|\}$ 亦有界．从而得到 $G(GW^{-1})^*\in L(Z)$．又因为 $G(GW^{-1})^*$ 和 $(G(GW^{-1})^*)^*$ 都是有界线性算子，它们在稠

集 $D(G^*)$ 上相等，故必恒等. 这就表明 $G(GW^{-1})^*$ 是自共轭的. 最后，由 E 的定义和上述已证得的结论，立即可得 $E\in L(Z)$. 而 $Q(GW^{-1})^*\in L(Z)$，故从

$$Q(GW^{-1})^*=\overline{Q(GW^{-1})^*}=\overline{QW^{-1}G^*}=\overline{(Q+\lambda G^*CG-\lambda G^*CG)W^{-1}G^*}$$
$$=\overline{(I-\lambda G^*CGW^{-1})G^*}=G^*\overline{(I-\lambda CGW^{-1}G^*)}\subset G^*(I-\lambda CG(GW^{-1})^*=G^*E$$

就得到 $Q(GW^{-1})^*=G^*E$. 证毕.

引理2.6 在引理2.5的条件下，对每一 $\tilde z\in Z$，$D(G)$ 上定义的二次泛函

$$\tilde J(v)=\langle Qv,v\rangle_U+\lambda\langle C(Gv-\tilde z),\ Gv-\tilde z\rangle_Z$$

存在唯一极小值点 $\tilde u=\lambda(GW^{-1})^*C\tilde z$.

证 显然 $\tilde u=\lambda(GW^{-1})^*C\tilde z\in D(G)$. 而从引理2.5中已证明了的公式 $Q(GW^{-1})^*=G^*E$，就可以算出：当 $v\in D(G)$ 时，

$$\begin{aligned}\tilde J(v)-\tilde J(\tilde u)&=\tilde J(\tilde u+(v-\tilde u))-\tilde J(\tilde u)\\&=\langle Q(v-\tilde u),\ v-\tilde u\rangle_U+\lambda\langle CG(v-\tilde u),\ G(v-\tilde u)\rangle_Z\\&\quad+2\langle Q\tilde u,v-\tilde u\rangle_U+2\lambda\langle C(G\tilde u-\tilde z),\ G(v-\tilde u)\rangle_Z\\&=\langle Q(v-\tilde u),\ v-\tilde u\rangle_U+\lambda\langle CG(v-\tilde u),\ G(v-\tilde u)\rangle_Z\\&\quad+2\lambda\langle (E+\lambda CG(GW^{-1})^*-I)C\tilde z,\ G(v-\tilde u)\rangle_Z\\&=\langle Q(v-\tilde u),\ v-\tilde u\rangle_U+\lambda\langle CG(v-\tilde u),\ G(v-\tilde u)\rangle_Z\geq 0.\end{aligned}$$

由 $W>0$ 及 $\{(v,Gv);v\in D(W)\}$ 在 $\{(v,Gv);v\in D(G)\}$ 中稠密这一事实可推知，上式中等号成立当且仅当 $v-\tilde u=0$，这就证明了 $\tilde u=\lambda(GW^{-1})^*C\tilde z$ 确是唯一极小值点.

三、状 态 反 馈

在这一节里，恒设 W 正定. 于是最优控制唯一存在且由(2.6)给出. 由于主要关心的是反馈律的计算，故无妨取 $z_d=0$. 为简单计，取 Q 和 C 均为恒等算子并舍弃 $\lambda=$ 这种平凡情形.

先给出以下结论，其验证是十分容易的.

引理3.1 设 G: $U\to Z$ 由(2.5)定义，则 G^* 是 Z 到 U 的稠定闭算子，且 $(G^*z)(t)=B^*e^{-A(T-t)}z$, $\forall z\in D(G^*)$.

现在证明最优控制的一个正则性结果.

定理3.2 由(2.6)给出的最优控制 $\hat u$ 是 $[0,T)$ 上的连续函数.

证 设 $t_0\in[0,T)$，由 e^{-At} 的强连续性和引理2.2可得，当 $t\to t_0+0$ 时，

$$|B^*e^{-A(T-t)}Ee^{-A^Th}-B^*e^{-A(T-t_0)}Ee^{-A^Th}|$$
$$\leq\|B^*\|_{L(V^\beta,\mathbf{R}^1)}\cdot\|e^{-A(T-t_0)}\|_{L(Z,V^\beta)}\cdot\|(e^{-A(t-t_0)}-I)Ee^{-A^Th}\|_Z\to 0.$$

当 $t\to t_0-0$ 时，亦有同样结果．故 $\lambda B^*e^{-A(T-t)}Ee^{-AT}h$ 是 $t\in[0,T)$ 的连续函数．而根据引理2.3和引理3.1，在修改一零集上的值后可以得到

$$\hat{u}=-\lambda(GW^{-1})^*e^{-AT}h=-\lambda B^*e^{-A(T-t)}Ee^{-AT}h\ .$$

因此定理的结论成立．

定理 3.2 表明最优控制 $\hat{u}$ 在每一时刻 $t\in[0,T)$ 都有确定的值，从而可以讨论状态反馈．

定理 3.3　边界点控系统 (I) 在目标泛函（1.4）之下的最优控制 $\hat{u}$ 可由状态线性反馈获得．确切地说，对每一 $t\in[0,T)$，存在 $F(t)\in L(V^{-\beta+1},\mathrm{R}^1)$，使 $\hat{u}(t)=F(t)\hat{y}(t)$．此处 $\hat{y}(t)$ 是系统 (I) 由最优控制 $\hat{u}$ 所决定的"最优轨道"在时刻 t 的值．

证　　由引理2.4知最优控制 $\hat{u}$ 唯一存在且由（2.6）给出，设 $\hat{y}(t;\hat{u})$ 是系统 (I) 相应的解，那末根据引理2.2在时刻 $s\in[0,T)$ 有 $\hat{y}(s;\hat{u})\overset{\text{def}}{=}h_s\in V^{-\beta+1}$．再对 $s\in[0,T)$，定义子系统

$$(I)_s\begin{cases}\dfrac{\partial y_s}{\partial t}+\tilde{A}\,y_s=0 & (t,x)\in(s,T)\times\Omega,\\ y_s=v_s(t)\delta(b-x) & (t,x)\in(s,T)\times\Gamma,\\ y_s(0,\cdot)=h_s & x\in\Omega\ .\end{cases}$$

控制函数 $v_s\in U_s\overset{\text{def}}{=}\{v\in U;\ v(t)=0\quad a.e.\ \ t\in(0,s)\}$．类似于（2.4），$(I)_s$ 的解可表成 $y_s(t)=e^{-A(t-s)}h_s+\int_s^t e^{-A(t-\sigma)}Bv_s(\sigma)d\sigma$．再给出价值函数：

$$J_s(v_s)=\langle v_s,v_s\rangle_{U_s}+\lambda\langle y_s(T;v_s),\ y_s(T;v_s)\rangle_Z \qquad (1.4)_s$$

和前一节一样，定义算子 G_s：$v_s\longmapsto G_sv_s=\int_s^T e^{-A(T-\sigma)}Bv_s(\sigma)d\sigma$，同样地 G_s 是 U_s 到 Z 的稠定闭算子．再引进函数空间 $U_s^I=\{v_s\in U_s;\ y_s(T;v_s)\in Z\}=\{v_s\in U_s;\ G_sv_s\in Z\}$．于是可以表述最优控制问题 (P) 的子问题：

$(P)_s$：寻找 $\hat{u}_s\in U_s^I$，使 $J_s(\hat{u}_s)=\inf J_s(v_s),v_s\in U_s^I$．

显然 U_s 是 U 的闭子空间且重合于 $L^2(s,T)$．设 P_s 是从 U 到 U_s 的投影算子，$U_s^\perp$ 为 U_s 在 U 中的正交补空间．易见 $U_s^\perp\subset U^I$．此外 $G_s=GP_s$，因而有

$$U_s^I=P_sU^I=P_s(U^I\cap(U_s\dotplus U_s^\perp))=P_s(U^I\cap U_s\dotplus U_s^\perp)=U^I\cap U_s．$$ 由此得 $G_s^*=P_sG^*$，

即 $(G_s^*z)(t)=B^*e^{-A(T-t)}z,t\in[s,T),z\in Z$．

在 U_s 中考虑算子 $W_s=I+\lambda G_s^*G_s=P_sWP_s$．因为 W 正定，故 W_s 亦正定．类似于引

理2.5可证明以下结论：$(G_sW_S^{-1})^* \in L(Z,U_s)$，$G_s(G_sW_S^{-1})^* \in L(Z)$而且是自共轭的，$E_s = I - \lambda G_s(G_sW_S^{-1})^* \in L(Z)$且$(G_sW_S^{-1})^* = G_s^*E_s$.

此外，应用引理2.6可得，问题$(P)_s$存在唯一最优控制$\widehat{u}_s = -\lambda(G_sW_s^{-1})^*e^{-A(T-s)}h_s$，而且$\widehat{u}_s$在$[s,T)$中连续．但根据Bellman的最优性原理，$\widehat{u}$在$U_s$上的投影$P_s\widehat{u}$应该是问题$(P)_s$的最优解，故$\widehat{u}(t) = \widehat{u}_s(t)$应该在$[s,T)$中处处成立．从而得到

$$\widehat{u}(t) = -\lambda B^*e^{-A(T-t)}E_se^{-A(T-s)}\widehat{y}(s),\quad (t \geq s). \tag{3.1}$$

特别，令$t=s$就得到状态反馈公式

$$\widehat{u}(t) = F(t)\widehat{y}(t),\quad t \in [0,T), \tag{3.2}$$

$$F(t) = -\lambda B^*e^{-A(T-t)}E_te^{-A(T-t)}. \tag{3.3}$$

虽然$F(t) \in L(V^{-\beta+1},\mathbf{R}^1)$，$0 \leq t < T$． 证毕．

下面研究如何计算$F(t)$．先引入以下算子：

$$H(t,s) = -\lambda B^*e^{-A(T-t)}E_se^{-A(T-s)},\quad 0 \leq s \leq t < T, \tag{3.4}$$

$$L(t,s) = B^*e^{-A(2T-t-s)},\quad K(t,s) = B^*e^{-A(2T-t-s)}B,\quad (t,s) \in [0,T)^2. \tag{3.5}$$

易见，对固定的(t,s)，$H(t,s) \in L(V^{-\beta+1},\mathbf{R}^1)$，$L(t,s) \in L(V^{-\beta+1},\mathbf{R}^1)$，$K(t,s) \in L(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1)$．它们均在各自定义域上强连续．

定理3.4 反馈算子（3.3）可由$F(t) = H(t,t)$，$(t<T)$得到，而$H(t,s)$是线性Fredholm积分方程

$$H(t,s) = -\lambda L(t,s) - \lambda\int_s^T K(t,\sigma)H(\sigma,s)d\sigma \tag{3.6}$$

的唯一解．（3.6）中的积分理解为强积分．

证 $F(t) = H(t,t)$是显然的．设$\varphi \in V^{-\beta+1}$，那末由E_s、G_s的定义和关系式$(G_sW_s^{-1})^* = G_s^*E_s$，可演绎出

$$\begin{aligned} H(t,s)\varphi &= -\lambda B^*e^{-A(T-t)}[I - \lambda G_s(G_sW_s^{-1})^*]e^{-A(T-s)}\varphi \\ &= -\lambda B^*e^{-A(2T-t-s)}\varphi - \lambda B^*e^{-A(T-t)}G_sH(\cdot,s)\varphi \\ &= -\lambda B^*e^{-A(2T-t-s)}\varphi - \lambda\int_s^T B^*e^{-A(2T-t-\sigma)}BH(\sigma,s)\varphi d\sigma. \end{aligned}$$

这就表明$H(t,s)$确是方程（3.6）的解．为证（3.6）的解的唯一性，只需证相应的齐次方程只有零解．设$\widetilde{H}(t,s)$满足$\widetilde{H}(t,s)\varphi = -\lambda\int_s^T K(t,\sigma)\widetilde{H}(\sigma,s)\varphi d\sigma$，$\forall\varphi \in V^{-\beta+1}$．那末由$K(t,s)$的定义可见$\widetilde{H}(t,s)\varphi$适合$W_s\widetilde{H}(\cdot,s)\varphi = 0$．而$W_s$是正定的，故$\widetilde{H}(\cdot,s)\varphi = 0$．由$s$和$\varphi$的任意性就推得$\widetilde{H}(t,s) \equiv 0$． 证毕．

定理3.3和定理3.4是本文的主要结果．它们对其它类型的边界条件也适用．这种求解反馈算子的方法还可推广到一般的由发展算子描述的系统．在本文的特殊情形下，方

程(3.6)可进一步化为普通的函数积分方程，以便于实际计算．为说明这一点，先建立以下引理．

引理 3.5 算子A的谱由离散特征值$\{\lambda_k; 0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\}$组成，满足$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty$，且存在有限极限$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k/k^{2/n}$．相应的特征函数$\{\varphi_k; \|\varphi_k\|_Z=1,\ k=1,2,\cdots\}$构成$Z$的标准正交完备基．此外还有$e^{-At}\varphi_k=e^{-\lambda_k t}\varphi_k$．

此引理属于椭圆方程特征值问题的经典结果(见[8])．引理中n是空间的维数．我们还可以证明以下结果(证明从略)．

引理 3.6 上述的$\{\varphi_k\}\subset C^\infty(\overline{\Omega})$，且有估计$\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}}|D\varphi_k(x)|\leq \text{const}\cdot\lambda_k^{\beta/2}$．这里$D=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$，$\lambda_k$是相应的特征值，$\beta$是第2节中取定的常数．

设$\Delta=\{(t,s);\ 0\leq s\leq t<T\}$．由引理3.6可直接推出

引理 3.7 (i) 级数$k(t,s)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}e^{-\lambda_j(2T-t-s)}\left[\dfrac{\partial\varphi_j(b)}{\partial\nu_A}\right]^2$在$\Delta$中内闭一致收敛，且$(t,s)\in C^\infty(\Delta)$．(ii) 对每一非负整数$m$，函数项级数$l(t,s)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}e^{-\lambda_j(2T-t-s)}\dfrac{\partial\varphi_j(b)}{\partial\nu_A}\cdot\varphi_j$按$C^m(\overline{\Omega})$的范数关于$(t,s)\in\Delta$内闭一致收敛；$l(t,s)$关于$(t,s)\in\Delta$在$C^m(\overline{\Omega})$中连续．此外还有

$$B^*e^{-A(2T-t-s)}Bv=k(t,s)v,\quad \forall v\in\mathbf{R}^1,$$
$$B^*e^{-A(2T-t-s)}z=\langle l(t,s),z\rangle_{V^{\beta-1},V^{-\beta+1}},\quad \forall z\in V^{-\beta+1}.$$

$F(t)$、$H(t,s)$均属于$L(V^{-\beta+1},\mathbf{R}^1)=(V^{-\beta+1})'$，而$V^{\beta-1}$自反，故存在取值于$V^{\beta-1}$的函数$f(t)$和$h(t,s)$，使$F(t)z=\langle f(t),z\rangle_{V^{\beta-1},V^{-\beta+1}}$，$H(t,s)z=\langle h(t,s),z\rangle_{V^{\beta-1},V^{-\beta+1}}$，$\forall z\in V^{-\beta+1}$．于是有

定理 3.8 设$\hat{u}$是问题(P)的最优控制．$\hat{y}$是相应的最优轨道，则存在连续函数$f(t)$: $[0,T)\to V^{\beta-1}$，使$\hat{u}(t)=\langle f(t),\hat{y}(t)\rangle_{V^{\beta-1},V^{-\beta+1}}$，而$f(t)=h(t,t)$，$h(t,s)$是以下线性 Fredholm 积分方程的唯一解

$$h(t,s)=-\lambda l(t,s)-\lambda\int_s^T k(t,\sigma)h(\sigma,s)d\sigma. \tag{3.6$'$}$$

最后，由于$h(t,s)\in V^{\beta-1}$，故可按$\{\varphi_j\}$作Fourier展开得$h(t,s)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}h_j(t,s)\varphi_j$．于是求解(3.6)$'$等价于求解

$$h_j(t,s) = -\lambda e^{-\lambda_j(2T-t-s)}\frac{\partial \varphi_j(b)}{\partial \nu_A} - \lambda\int_s^T k(t,\sigma)h_j(\sigma,s)d\sigma, \quad j=1,2,\cdots \tag{3.7}$$

这些是普通函数积分方程．由此可构造各种具体的逼近格式．

致谢 作者曾得到复旦大学姚允龙老师的热情指导，谨致谢忱．引理 2.5 首先由他得到．本文采用不同的方法进行证明，条件也更一般些．

参 考 文 献

〔1〕 Lions J.L., Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control. Science Press, Beijing, (1981).

〔2〕 李大潜，某些高阶抛物型方程的解的极限性态及其在最优控制中的应用．数学年刊（英文版），3，(1982)，527—544.

〔3〕 Lasiecka I., Unified Theory for Abstract Parabolic Boundary Problems－A Semigroup Approach, Appl. Math. Optim. 6, (1980), 287－334.

〔4〕 Showalter R.E., Hilbert Space Method for Partial Differential Equations, Pitman Publishing Limited, (1977).

〔5〕 Lions J.L. and Magenes E., Non－Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Springer Verlag, (1972).

〔6〕 Paze, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Lecture Notes No. 10, University of Maryland, (1983).

〔7〕 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，(1959).

〔8〕 Agmon, S., Lectures on Elliptic Boundary Value Problem, D. Van Nostrand Company, INC, (1965).

OPTIMAL CONTROL AND FEEDBACK SYNTHESIS FOR SYSTEM GOVERNED BY PARABOLIC EQUATION WITH POINTWISE CONTROL ON THE BOUNDARY

Chen Shuping

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

This Paper is concerned with a linear-quadratic optimal control problem. The state of the system is governed by parabolic equation with pointwise control on the boundary. After establishing the existence and uniqueness of the optimal control as well as the linear state feedback law, we developed a new methed to calculate the feedback operator, which is different from the classical Reccati equation.