第3卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No. 2
1986年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1986

高阶模型最优简化的积分平方误差法的若干性质

邵　剑

（浙江大学）

摘　要

大系统的模型最优简化的积分平方误差法，至今仅仅对输入函数为脉冲、幂函数和正弦函数时有效．本文首先指出，指数函数等一类函数输入时的高阶模型也能用积分平方误差法进行最优简化．其次证明，和原系统有相同输出意义的等价系统具有叠加性．从而把高阶模型的最优简化工作推广到相当广泛的范围．

正弦函数输入时高阶模型的最优简化模型是与角频率有关的．本文最后给出，当角频率有偏离时，其最优简化模型可以利用正弦输入函数的渐近展开式作相应的改变的结论．而且这种方法也适用于其它输入函数的参数偏离时的情形．

一、引　言

大系统理论中，在某种意义下把一个高阶模型简化为一个低阶的近似模型是当今很受人注意的一个重要课题．这种简化要求在计算上、分析上比原系统容易处理，而仍能提供关于原大系统的足够信息．

大系统的模型最优简化的许多方法中，Wilson[1]提出的积分平方误差法的物理涵义很清晰，它将大系统的输出和简化模型的输出之间的误差的某一泛函作为近似的一种量度，并使之极小而寻找简化模型．至今，Wilson在二次性能指标意义下最优简化多输入、多输出的定常线性系统时，仅仅考虑输入为脉冲和幂函数形式[2]．张钟俊等[3、4]把它推广到输入是突加正弦函数的情形，并提出问题：在正弦函数输入时，高阶系统的最优简化模型是与角频率有关的，但当角频率（我们泛称为输入函数的参数）有偏离时，最优简化模型应如何相应地改变，使之能够较好地适应．然而这些工作对其它输入形式的模型最优简化和参数偏离问题尚未涉及．

尽管本工作的一部分思想仍基于把系统的输出响应分解为瞬态和稳态两部分，但本文讨论的情形却是以往工作尚未涉及的更广泛的输入函数输入时高阶模型的最优简化问题．本文主要提出，在有相同输出的意义下，原系统的等价系统具有叠加性质的结论．

本文于1984年5月30日收到，1985年6月29日收到修改稿．

正由于这一思想，就把最优简化多输入、多输出定常线性系统的类型扩大到相当广泛的范围．特别，文[3]的结果是这里的一个特例．最后给出，原系统输入函数的参数发生偏离时，其最优简化模型可以利用输入函数的渐近展开式作相应改变的结论．

本文考虑高阶定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中$x(t) \in R^n$，$u(t) \in R^p$，$y(t) \in R^q$．它的模型最优简化问题是求其形为

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t), \quad x_r(0) = 0, \\ y_r(t) = C_r x_r(t) + Nu(t) \end{cases} \tag{2}$$

的简化模型，式中$x_r(t) \in R^r$，$q \le r < n$，$y_r(t) \in R^q$，而N是作用于$u(t)$的线性微分算子．同时使性能指标

$$J = \int_0^\infty (y - y_r)^T Q (y - y_r)\, dt \tag{3}$$

在给定输入时达到最小．其中Q是正定对称矩阵．

二、指数型函数输入时高阶模型的最优简化

本节研究至今尚未考虑过的指数型函数输入时高阶模型（1）的最优简化问题．它的关键在于找出在给定指数函数和脉冲函数叠加输入而与原系统具有相同输出的等价系统．

定理1　设模型（1）的输入函数为

$$u(t) = \begin{cases} V \dfrac{t^k}{k!} e^{s_0 t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{4}$$

其中s_0不是A的特征值，k是非负整数，V是任一l维常向量．则系统（1）、（4）的输出$y(t)$和下列系统（5）的输出$z(t)$相同，

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + (A - s_0 I)^{-(k+1)} BV\delta(t), \quad \xi(0) = 0, \\ z(t) = C\xi(t) - C(A - s_0 I)^{-1} Bu(t) - C(A - s_0 I)^{-2} B[u'(t) - s_0 u(t)] \\ \quad - C(A - s_0 I)^{-3} B[u''(t) - 2s_0 u'(t) + s_0^2 u(t)] - \cdots \\ \quad - C(A - s_0 I)^{-(k+1)} B (D - s_0)^k u(t), \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$(D - s_0)^k u(t) = \frac{d^k u}{dt^k} - C_k^1 s_0 \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}} + \cdots + (-s_0)^k u(t).$$

证　显然，$(A - s_0 I)$可逆，且可以直接验证恒等式

$$\frac{(sI - A)^{-1}}{(s - s_0)^{k+1}} = (sI - A)^{-1} (A - s_0 I)^{-(k+1)} - \frac{(A - s_0 I)^{-1}}{(s - s_0)^{k+1}} - \frac{(A - s_0 I)^{-2}}{(s - s_0)^k} - \cdots -$$

$$-\frac{(A-s_0I)^{-k}}{(s-s_0)^2}-\frac{(A-s_0I)^{-(k+1)}}{(s-s_0)}$$

成立．再对系统（1）、（4）的输出$y(t)$和系统（5）的输出$z(t)$分别作拉普拉斯变换，由上式便知它们具有相同的输出．证毕．

特别，在$k=0$时问题退化为模型（1）在指数函数

$$u(t)=\begin{cases}Ve^{s_0t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \tag{6}$$

输入时的最优简化情形．

定理2 设模型（1）的输入函数为

$$u(t)=\begin{cases}V\dfrac{1}{\omega}e^{-s_0t}\sin\omega t & t\geq 0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \tag{7}$$

其中$\omega\in R^1$，且$[(A+s_0I)^2+\omega^2I]$可逆，则系统（1）、（7）和下列系统（8）具有相同输出．

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)=A\xi(t)+[(A+s_0I)^2+\omega^2I]^{-1}BV\delta(t), \quad \xi(0)=0,\\ z(t)=C\xi(t)-C(A+2s_0I)[(A+s_0I)^2+\omega^2I]^{-1}Bu(t)\\ \qquad -C[(A+s_0I)^2+\omega^2I]^{-1}B\dfrac{du(t)}{dt}.\end{cases} \tag{8}$$

注意到恒等式

$$\frac{(sI-A)^{-1}}{(s+s_0)^2+\omega^2}=(sI-A)^{-1}[(A+s_0I)^2+\omega^2I]^{-1}-\frac{(A+2s_0I)[(A+s_0I)^2+\omega^2I]^{-1}}{(s+s_0)^2+\omega^2}$$

$$-\frac{s[(A+s_0I)^2+\omega^2I]^{-1}}{(s+s_0)^2+\omega^2},$$

同理可证得本定理．

指数型函数输入时高阶模型（1）的最优简化模型可以由此按文[2]、[5]的有关步骤清晰地得到．

三、等价系统的叠加性

假设若干定常线性系统为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bv_i(t), \quad x(0)=0, \quad i=1, \cdots, l,\\ y(t)=Cx(t),\end{cases} \tag{9}$$

其中

$$v_i(t)=\begin{cases} Vv_i(t), & t\geq 0, \\ 0, & t<0, \end{cases} \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l. \tag{10}$$

又设它们等价于相应的系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=A\xi(t)+G_iBV\delta(t),\ \xi(0)=0, \\ z(t)=C\xi(t)+CN_iv_i(t),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l, \end{cases} \tag{11}$$

其中G_i是$n\times n$阶矩阵，N_i是作用于$v_i(t)$的线性微分算子.

这里的等价意义是指系统（9）、（10）的各输出$y(t)$和系统（11）的各相应输出$z(t)$相等. 显然，它们经拉氏变换后也相等，即

$$BVL(v_i(t))=G_iBV+(sI-A)L(N_iv_i(t)),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l. \tag{12}$$

考虑输入函数

$$u(t)=\sum_{i=1}^{l}a_iv_i(t), \tag{13}$$

其中a_i，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$，是给定的实或复常数. 现在指出，和原系统有相同输出意义的等价系统具有叠加性性质.

定理3　设（9）、（10）的各系统等价于（11）的相应系统，则系统（1）、（13）等价于系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=A\xi(t)+\sum\limits_{i=1}^{l}a_iG_iBV\delta(t),\ \xi(0)=0, \\ z(t)=C\xi(t)+C\sum\limits_{i=1}^{l}a_iN_iv_i(t). \end{cases} \tag{14}$$

证　分别对系统（1）、（13）的输出和系统（14）的输出作拉氏变换，由线性系统的叠加原理和式（12）即证得本定理.

于是，系统（1）在函数向量（13）输入时的输出和系统（14）在（13）与脉冲函数叠加输入时的输出相等. 而且由输入（13）引起的稳态输出必为输入$v_i(t)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$，引起的稳态输出的相应线性组合.

如果把脉冲函数、幂函数和指数函数等作为高阶模型（1）的输入函数的基本母体，经上述定理就可以得到一类相当广泛的函数输入时系统（1）的等价系统. 从而，用积分平方误差法最优简化高阶模型就适用于较广的范围.

直接应用定理3可以得到如下推论.

推论1　如果式（10）的$v_1(t)=e^{i\omega t}$，$v_2(t)=e^{-i\omega t}$，$l=2$，$\omega\in R^1$，且设$\pm\omega i$不是A的特征值，则系统（1）在函数

$$u(t)=\frac{1}{2i}v_1(t)-\frac{1}{2i}v_2(t)$$

输入时的输出和系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=A\xi(t)+\omega(A^2+\omega^2 I)^{-1}BV\delta(t),\ \xi(0)=0, \\ z(t)=C\xi(t)-CA(A^2+\omega^2 I)^{-1}Bu(t)-C(A^2+\omega^2 I)^{-1}B\dfrac{du(t)}{dt} \end{cases}$$

的输出相同．

这就是文〔3〕的主要结论．且可知在系统（1）渐近稳定时，$\pm\omega i$不是A的特征值的假设不是实质性的．

推论2 设矩阵A非退化，系统（1）的输入函数是l阶多项式

$$u(t)=\begin{cases} V\sum\limits_{k=0}^{l}\dfrac{a_k}{k!}t^k, & t\geq 0, \\ 0, & t<0, \end{cases} \tag{15}$$

其中l是非负整数，则系统（1）、（15）和系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=A\xi(t)+\sum\limits_{k=0}^{l}a_kA^{-(k+1)}BV\delta(t),\ \xi(0)=0, \\ z(t)=C\xi(t)-C\sum\limits_{k=0}^{l}A^{-(k+1)}B\dfrac{d^k}{dt^k}u(t) \end{cases} \tag{16}$$

的输出相同．

推论3 如果系统（1）渐近稳定，且它的输入函数为l阶三角多项式

$$u(t)=\begin{cases} V\left(a_0+\sum\limits_{i=1}^{l}a_i\sin\omega_i t\right), & t\geq 0, \\ 0, & t<0, \end{cases} \tag{17}$$

则系统（1）、（17）和系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=A\xi(t)+\left[a_0A^{-1}+\sum\limits_{i=1}^{l}a_i\omega_i(A^2+\omega_i^2 I)^{-1}\right]BV\delta(t),\ \xi(0)=0, \\ z(t)=C\xi(t)-a_0CA^{-1}BV-CA\sum\limits_{i=1}^{l}a_i(A^2+\omega_i^2 I)^{-1}BV\sin\omega_i t \\ \qquad -C\sum\limits_{i=1}^{l}a_i(A^2+\omega_i^2 I)^{-1}BV\dfrac{d}{dt}(\sin\omega_i t) \end{cases} \tag{18}$$

的输出相同．

推论4　设渐近稳定系统（1）的输入函数是

$$u(t)=\begin{cases}Vt\cos\omega t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \tag{19}$$

则其输出$y(t)$与系统

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)=A\xi(t)+(A^2-\omega^2I)(A^2+\omega^2I)^{-2}BV\delta(t),\ \xi(0)=0,\\ z(t)=C\xi(t)-CA(A^2+\omega^2I)^{-1}BVt\cos\omega t+\omega C(A^2+\omega^2I)^{-1}BVt\sin\omega t\\ \quad -C(A^2-\omega^2I)(A^2+\omega^2I)^{-2}BV\cos\omega t+2\omega CA(A^2+\omega^2I)^{-2}BV\sin\omega t\end{cases} \tag{20}$$

的输出$z(t)$相同.

众所周知，许多函数可以用多项式或三角多项式逼近. 利用上述定理和推论就可以对相当广泛的函数输入时的高阶模型（1）进行最优简化.

四、输入函数的参数偏离时高阶模型的最优简化

实际上，系统（1）的许多输入函数含有一些初始参数，如上一节中的初始参数ω、s_0等. 当这些函数输入时，系统(1)的最优简化模型是与原系统的初始参数有关的. 如果这些参数有偏离，其简化模型应作相应的改变. 找出这种相应的改变是很有意义的.

本节提出一种利用输入函数的渐近表达式及上一节给出的叠加性来解决输入函数的参数偏离时其最优简化模型如何相应地改变的方法. 我们仅以系统（1）的输入为突加正弦函数

$$u(t)=\begin{cases}V\sin\omega t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{21}$$

时模型简化问题为例来说明所提的方法.

假设角频率ω的小偏离为ε. 考虑系统（1）在函数

$$u(t)=\begin{cases}V\sin(\omega+\varepsilon)t, & t\ge 0,\\ 0, & t\le 0\end{cases} \tag{22}$$

输入时模型的最优简化问题.

注意到对任何$t>0$，有

$$\sin(\omega+\varepsilon)t=\sin\omega t+\varepsilon t\cos\omega t+O(\varepsilon^2, t). \tag{23}$$

对充分小的偏离ε和任意给定的$T>0$，假设在$[0, T]$上取一次项$\sin\omega t+\varepsilon t\cos\omega t$来近似$\sin(\omega+\varepsilon)t$. 于是就方法而言，对于输入的正弦函数的角频率有偏离时系统（1）的模型最优简化问题，我们只要研究系统（1）在输入函数

$$u(t)=\begin{cases}V(\sin\omega t+\varepsilon t\cos\omega t), & t\ge 0,\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{24}$$

作用下模型的最优简化问题.

定理4 设系统(1)渐近稳定，则其在函数(24)输入时的输出y(t)和系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=A\xi(t)+[\omega(A^2+\omega^2I)^{-1}+\varepsilon(A^2-\omega^2I)(A^2+\omega^2I)^{-2}]BV\delta(t), \quad \xi(0)=0, \\ z(t)=C\xi(t)-\varepsilon CA(A^2+\omega^2I)^{-1}BV\cdot t\cos\omega t+\varepsilon\omega C(A^2+\omega^2I)^{-1}BVt\sin\omega t \\ \qquad -C[\omega(A^2+\omega^2I)^{-1}+\varepsilon(A^2-\omega^2I)(A^2+\omega^2I)^{-2}]BV\cos\omega t \\ \qquad -C[A(A^2+\omega^2I)^{-1}-2\varepsilon\omega A(A^2+\omega^2I)^{-2}]BV\sin\omega t \end{cases} \tag{25}$$

的输出z(t)相同.

由定理3和推论4便可证得本定理.

将系统(25)输出的瞬态和稳态分开. 与瞬态部分相对应的系统只有脉冲输入，便可以求得它的最优简化模型[1,5]，设其为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r(t)=A_r\xi_r(t)+[\omega(A_r^2+\omega^2I)^{-1}+\varepsilon(A_r^2-\omega^2I)(A_r^2+\omega^2I)^{-2}]B_rV\delta(t), \\ z_r'(t)=C_r\xi_r(t), \end{cases} \tag{26}$$

其中$z_r'(t)$是输出的瞬态部分. 对该简化模型加上系统(25)的稳态输出，再利用定理4，就得到在函数(24)输入时系统(1)的最优简化模型的系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t)=A_rx_r(t)+B_ru(t), \\ y_r(t)=C_rx_r(t)+W, \end{cases} \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned} W=&\varepsilon[C_rA_r(A_r^2+\omega^2I)^{-1}B_r-CA(A^2+\omega^2I)^{-1}B]Vt\cos\omega t \\ &-\varepsilon\omega[C_r(A_r^2+\omega^2I)^{-1}B_r-C(A^2+\omega^2I)^{-1}B]Vt\sin\omega t \\ &+\{C_r[\omega(A_r^2+\omega^2I)^{-1}+\varepsilon(A_r^2-\omega^2I)(A_r^2+\omega^2I)^{-2}]B_r \\ &-C[\omega(A^2+\omega^2I)^{-1}+\varepsilon(A^2-\omega^2I)(A^2+\omega^2I)^{-2}]B\}V\cos\omega t \\ &+\{C_r[A_r(A_r^2+\omega^2I)^{-1}-2\varepsilon\omega A_r(A_r^2+\omega^2I)^{-2}]B_r \\ &-C[A(A^2+\omega^2I)^{-1}-2\varepsilon\omega A(A^2+\omega^2I)^{-2}]B\}V\sin\omega t. \end{aligned} \tag{28}$$

系统(27)、(28)近似地表示了当正弦输入函数(21)的角频率ω有偏离ε时系统(1)的最优简化模型.

将上述结果和角频率没有发生偏离的正弦函数输入时高阶模型的最优简化模型作一比较. 对于等价系统，只要比较一下式(20)、(25)和文[3]中式(7)就能很清楚地看出两者的差别. 式(25)的右边除$A\xi(t)$和$C\xi(t)$项以外的部分是另两式相应部分的线性组合.

如果需要，可以在输入函数$\sin(\omega+\varepsilon)t$的展开式中取足够多的项. 相应得到的最优简化模型可以更好地近似表示当正弦输入函数的角频率发生偏离时系统(1)的最优简化模型。

同理可以对其它含参数的函数输入时的相应问题作出处理.

参 考 文 献

〔1〕Wilson, D. A., Optimum Solution of Model-Reduction Problem, Proc. IEE, 117, (1970), 1161—1165.

〔2〕Wilson, D.A. and Mishra, R.N., Optimal Reduction of Multivariable System, Int.J. Control, 29, (1979), 267—278.

〔3〕张钟俊、白尔维，正弦函数输入时高阶模型的最优简化，控制理论与应用，1，(1984)，79—86.

〔4〕张钟俊等，多项式输入无稳态输出误差时的最优简化模型，应用科学学报，1，2，(1983)，111—119.

〔5〕Mishra, R.N. and Wilson, D.A., A New Algorithm for Optimal Reduction of Multivariable Systems, Int. J. Control, 31, (1980), 443—466.

THE OPTIMAL REDUCTION OF HIGHER-ORDER MODELS

Shao Jian

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

For optimal model-reduction of large scale systems, up to now, the integral-square-error method has been developed for systems with impulse, power or sine function inputs only. In this paper the author proves the following: (1) The optimal reduction of higher-order models with exponential inputs is also realizable. (2) The identical systems with same outputs have superposition property. (3) If a parameter in the inputs of the original large scale system deviates, the corresponding reduced order model can be changed by using the asymptotic expansion of the input functions.