第3卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No. 2
1986年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1986

一类控制有约束的非线性系统的全局可控性

陈彭年　贺建勋
（厦门大学）

摘　要

本文考虑非线性控制系统 $\dot{x}=A(t)x+K(t,u)+g(t,x,u)$, $u\in\Omega(t)$ 的全局可控性，去掉了文献〔2,3,4〕中关于 $X^{-1}(t)g(t,x,u)$（$X(t)$ 是微分方程 $\dot{x}=A(t)x$ 的标准基解矩阵）积分有界的要求，得到了充分条件，并举例说明其应用。

一、引　言

考虑控制系统

$$\dot{x}=A(t)x+K(t,u)+g(t,x,u),\quad u\in\Omega(t), \tag{1}$$

$$\dot{x}=A(t)x+K(t,u),\quad u\in\Omega(t), \tag{2}$$

其中 $x\in R^n$，$A(t)$ 是〔$0,\infty$）上 $n\times n$ 连续函数矩阵，K:〔$0,\infty$）$\times R^m\to R^n$ 和 g:〔$0,\infty$）$\times R^n\times R^m\to R^n$ 都是连续的，Ω 是定义在〔$0,\infty$〕上取值于 R^m 中非空紧子集的连续多值函数。

我们称系统（1）是全局可控的，如果 $\forall x^0\in R^n$，$\exists t_1\geq 0$，存在可测函数 $u(t)\in\Omega(t)$，$a.e.$ $t\in$〔$0,t_1$〕，使得系统（1）的解 $x(t)$ 在〔$0,t_1$〕上有定义，且满足 $x(0)=x^0$，$x(t_1)=0$。

到目前为止，已有很多文献研究了非线性系统的各种可控性，文〔1〕对此作了很好的综述。文〔2,3,4〕研究了 G—可控性（即目标是集合 G）和近似可控性，都要求 $X(t)^{-1}g(t,x,u)$（$X(t)$ 是微分方程 $\dot{x}=A(t)x$ 的标准基解矩阵）在〔$0,\infty$）$\times\Omega$ 上积分有界。当系统（2）为定常线性系统且全局可控时，一般来说，要求 $g(t,x,u)$ 随着 t 增加而负指数式趋于零，文〔2〕所举的几个例子都是如此。另外，文〔2,3,4〕还要求 $g(t,x,0)=0$。因此它们的适用范围受到很大限制。即便如此，文〔2〕的主要结果（文〔2〕定理1）仍然是不对的，这容易举例说明，因篇幅所限已经省略。

本文去掉了 $X^{-1}(t)g(t,x,u)$ 积分有界的要求，运用多值函数不动点定理进行证明，使得 $g(t,x,u)$ 不必是负指数式衰减，得到了全局可控的充分条件，并举例说明其应用。所得结果可以推广到 G—可控性上去。

本文于1984年8月21日收到，1985年8月20日收到修改稿。

在下面第二节里，叙述并证明主要结果，第三节里说明其应用.

二、主 要 结 果

对系统（1）和（2）作如下基本假设：

H_1. 存在连续函数 $M(t)$ 使得 $\|g(t,x,u)\| \le M(t)$，$(t,x)\in[0,\infty)\times R^n$，$u\in\Omega(t)$；

H_2. $K(t,0)=0$，$0\in \mathrm{Int}\,\Omega(t)$，$t\in[0,\infty)$；

H_3. $g(t,x,u)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件.

多值函数积分的定义见文〔5,6,7〕. 用 S^{n-1} 表示 R^n 中的单位球面. 设 E 是 R^n 的子集，定义 S^{n-1} 的点 x' 与 E 的内积[6]：

$$\langle x',E\rangle=\sup_{y\in E}\langle x',y\rangle.$$

用 $X(t)$ 表示 $\dot{x}=A(t)x$ 的基解矩阵，$X(0)=I$.

引理 假设

（i）$\forall x^0\in R^n$，$\exists T\ge 0$，使得对 $x'\in S^{n-1}$，有

$$\langle x',\int_0^T X^{-1}(\tau)K(\tau,\Omega(\tau))d\tau\rangle \ge \langle x',-\int_0^T X^{-1}(\tau)g(\tau,R^n,\Omega(\tau))d\tau\rangle-\langle x',x^0\rangle;$$

（ii）$\forall(t,x)\in[0,\infty)\times R^n$，$(K+g)(t,x,\Omega(t))^{*)}$ 是凸的；那么系统（1）是全局可控的.

证　$\forall x^0\in R^n$，$\exists T\ge 0$，使条件（i）成立. 用 $x(\cdot)$ 表示定义在 $[0,T]$ 上的连续函数. 设

$$a=\sup_{t\in[0,T]}\{\|X(t)\|(\|x^0\|+\int_0^t\|X^{-1}(\tau)\|(\|K(\tau,\Omega(\tau))\|+M(\tau))d\tau)\},$$

其中 $\|K(\tau,\Omega(\tau))\|=\sup_{u\in\Omega(\tau)}\|K(\tau,u)\|$. a 显然是有限的. 作集合

$$Q=\{x(\cdot)\,|\,x(\cdot)\text{ 绝对连续，}x(0)=x^0,\ x(T)=0,\ \|x(\cdot)\|_M\le a\},$$

其中 $\|x(\cdot)\|_M=\max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

用 $C([0,T],\|\cdot\|_M)$ 表示 $[0,T]$ 上的连续函数、以 $\|\cdot\|_M$ 为范数组成的 Banach 空间. 显然 Q 是 $C([0,T],\|\cdot\|_M)$ 的闭凸子集.

定义多值映射 $P:Q\to 2^Q$

$$P(x(t))=\{y(t)\,|\,y(t)=X(t)(x^0+\int_0^t X^{-1}(\tau)(K(\tau,u(\tau))+g(\tau,x(\tau),u(\tau)))d\tau),$$
$$u(t)\in\Omega(t),\ a.e.\ \ t\in[0,T],\ u(t)\text{ 可测，}y(T)=0\}.$$

可以证明映射 P 具有下面三个性质：

---

*）：$(K+g)(t,x,\Omega(t))\triangleq\{K(t,u)+g(t,x,u)\,|\,u\in\Omega(t)\}$.

(a) $\forall x(\cdot)\in Q$, $P(x(\cdot))$ 是非空、凸的;

(b) P 的图 $G(P)$ 是闭的;

(c) $\bigcup\limits_{x(\cdot)\in Q} P(x(\cdot))$ 是序列紧的.

根据 Bohnenblust－Karlin 多值函数固定点定理[8], 可知 P 有固定点 $x^*(\cdot)$:

$$x^*(\cdot)\in P(x^*(\cdot)).$$

由此可知, x^0 是可控的. 由 x^0 的任意性, 知系统 (1) 是全局可控的.

定理 假设

(i) 在系统 (1) 和 (2) 中, $K(t,u)=B(t)u$;

(ii) 存在 $k\in(0,1)$ 和 $t_1>0$, 当 $t\geq t_1$ 时, $\forall x'\in S^{n-1}$ 有

$$k\langle x',\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)\Omega(\tau)d\tau\rangle\geq\langle x',-\int_0^t X^{-1}(\tau)g(\tau,R^n,\Omega(\tau))d\tau\rangle;$$

(iii) 系统 (2) 全局可控;

(iv) $\forall(t,x)\in[0,\infty]\times R^n$, $(B+g)(t,x,\Omega(t))$ 是凸的; 那么系统 (1) 全局可控。

证 用 $Co\Omega(t)$ 表示 $\Omega(t)$ 的凸包. 显然, 存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\varepsilon Co\Omega(t)+kCo\Omega(t)\subset Co\Omega(t),\quad t\in[0,\infty).$$

由系统 (2) 的全局可控性知道,

$$\bigcup_{t>0}\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)\varepsilon\Omega(\tau)d\tau=\varepsilon\bigcup_{t>0}\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)\Omega(\tau)d\tau=R^n.$$

所以 $\forall x^0\in R^n$, $\exists T_1>0$, 当 $t\geq T_1$ 时,

$$\langle x',\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)\varepsilon\Omega(\tau)d\tau\rangle\geq-\langle x',x^0\rangle,\quad x'\in S^{n-1}.$$

设 $T=\max\{t_1,T_1\}$, $\forall x'\in S^{n-1}$ 有

$$\begin{aligned}\langle x',\int_0^T X^{-1}(\tau)B(\tau)\Omega(\tau)d\tau\rangle&=\langle x',\int_0^T X^{-1}(\tau)B(\tau)Co\Omega(\tau)d\tau\rangle\\ &\geq\langle x',\int_0^T X^{-1}(\tau)B(\tau)\varepsilon Co\,\Omega(\tau)d\tau\rangle+\langle x',\int_0^T X^{-1}(\tau)B(\tau)kCo\Omega(\tau)d\tau\rangle\\ &\geq-\langle x',x^0\rangle+\langle x',-\int_0^T X^{-1}(\tau)g(\tau,R^n,\Omega(\tau))d\tau\rangle.\end{aligned}$$

由此可见引理的条件 (i) 成立, 引理的条件 (ii) 由条件 (iv) 保证, 所以系统 (1) 是全局可控的.

三、应 用

考虑控制系统

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}g_1(t,x)\\g_2(t,x)\end{pmatrix},\quad u\in[-1,1];\qquad(3)$$

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}u,\quad u\in[-1,1], \tag{4}$$

其中　$b_1^2+b_2^2\neq 0$，$|g_1(t,x)|\leq M_1$，$|g_2(t,x)|\leq M_2$，M_1，M_2是常数.

本例中，$X(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$. $\forall x'\in S^1$，可以写成形式 $x'=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$，$0\leq\alpha<2\pi$.

$$\begin{aligned}I_1(t,\alpha)&\triangleq\left\langle\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\int_0^t X^{-1}(\tau)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}[-1,1]d\tau\right\rangle\\ &=\left\langle\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\int_0^t\begin{pmatrix}\cos\tau & -\sin\tau\\ \sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}[-1,1]d\tau\right\rangle\\ &=\int_0^t\left\langle\begin{pmatrix}\sin(\alpha-\tau)\\ \cos(\alpha-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}[-1,1]\right\rangle d\tau\\ &=\sqrt{b_1^2+b_2^2}\int_0^t|\sin(\alpha+\beta-\tau)|d\tau,\end{aligned}$$

其中β由$\sin\beta=\dfrac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$确定.

$$\begin{aligned}I_2(t,\alpha)&\triangleq\left\langle\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},-\int_0^t\begin{pmatrix}\cos\tau & -\sin\tau\\ \sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}g(\tau,R^2)d\tau\right\rangle\\ &\leq\int_0^t(M_1|\cos(\alpha-\tau)|+M_2|\sin(\alpha-\tau)|)d\tau,\end{aligned}$$

其中　$g(t,x)=\begin{pmatrix}g_1(t,x)\\ g_2(t,x)\end{pmatrix}$.

设　$\sqrt{b_1^2+b_2^2}>M_1+M_2$。显然，存在$k\in(0,1)$，使得$k\sqrt{b_1^2+b_2^2}>M_1+M_2$.

记$\delta=k\sqrt{b_1^2+b_2^2}-M_1-M_2$，取$t_1$使得$\left[\dfrac{t_1}{2\pi}\right]\delta\geq M_1+M_2$，当$t\geq t_1$时

$$\begin{aligned}kI_1(t,\alpha)&\geq k\,4\left[\frac{t}{2\pi}\right]\sqrt{b_1^2+b_2^2}=4(M_1+M_2)\left[\frac{t}{2\pi}\right]+4\delta\left[\frac{t}{2\pi}\right]\\ &\geq 4(M_1+M_2)\left(\left[\frac{t}{2\pi}\right]+1\right)\geq I_2(t,\alpha).\end{aligned}$$

由此可知定理的条件（ii）满足．根据文〔6〕定理 17.6，系统(4)是全局可控的.

因此根据上面的定理得到：当$\sqrt{b_1^2+b_2^2}>M_1+M_2$时，系统（3）是全局可控的.

参考文献

〔1〕 Casti, J. L., Recent Developments and Future Perspectives in Nonlinear Systems Theory, SIAM Review, **24**, 3, (1982), 301-331.

〔2〕 Chukwu, E. N. and Gronski, J. M., Controllability of Nonlinear Systems with Restrained Control to Closed Convex Sets, in Differential Game & Control Theory Ⅱ, Proceedings of the 2nd Kingston Conference, (1976), Marced Derkher, New York.

〔3〕 Dauer, J. P., Approximate Controllability of Nonlinear Systems with Restrained Control, J. Math. Anal. Appl., **46**, 1, (1974). 126-131.

〔4〕 Dauer, J. P.,Approximate and Complete Controllability of Non-Linear Systems to a Convex Target Sat, J. Math. Anal. Appl., **61**, 1, (1977), 97-112.

〔5〕 Hermes, H. and LaSalle J. P., Functional Analysis and Time Optimal Control, Academic Press (1969), New York.

〔6〕 Mary, B. and Richard, D., Some Analytic and Measure Theoretic Properties of Set-Valued Mapping, SIAM J. Control and Optimization, **15**, 4, (1977), 624-635.

〔7〕 Wagner, D. E., Survey of Measurable Selection Theorems, SIAM J. Control and Optimization, **15**, 5, (1977), 859-903.

〔8〕 Angell T.S., On the Controllability for Nonlinear Hereditary System: a Fixed-Point Approach, Nonlinear Analysis, Theory, Method & Applications, **4**, 3, (1980), 529-545.

〔9〕 Chukwu, E. N., Null Controllability in Function Space of Nonlinear Retarded Systems with Limited Control, J. Math. Anal. Appl., **103**, 1, (1984).

〔10〕 Won-Gulhwang, Willian, E. S., Controllability Results for System with a Nonconvex Target, IEEE AC—**29**, 9, (1984), 794—803.

GLOBAL CONTROLLABILITY OF A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS WITH RESTRAINED CONTROL

Chen Pengnian, He Jianxun

(Xiamen University)

Abstract

In this paper, we consider the global controllability of system

$$\dot{x}=A(t)x+K(t,u)+g(t,x,u),\ u\in\Omega(t), \tag{1}$$

where $x\in R^n$, $A(t)$ is an $n\times n$ matrix of continuous functions on $[0,\infty)$, K: $[0,\infty)\times R^m\to R^n$ and g: $[0,\infty)\times R^n\times R^m\to R^n$ are continuous, and $\Omega(t)$ is a continuous multifunction on $[0,\infty)$ taking its values in nonempty compact subset of R^m. We give up the limit that $X^{-1}(t)g(t,x,u)$ ($X(t)$ is the fundemental matrix solution of $\dot{x}=A(t)x$ such that $X(0)=I$) is integrably bounded on $[0,\infty)\times\Omega$, which is required in several references, and obtain sufficient condition for global controllability of system (1). We give an example to show the result is applicable for a class of systems.