第3卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No. 2
1986年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1986

状态转移矩阵e^{At}的一种新算法及其仿真计算

吴 华 英

（长春光学精密机械学院）

摘 要

本文给出了一种计算状态转移矩阵 e^{At} 的新算法. 由于应用了 Чебышев 多项式，因此导出的新算式几乎就是 e^{At} 在区间[a, b]内的最佳逼近有理分式. 文中同时给出了二阶系统的仿真结果.

一、引 言

众所周知，研究线性系统的问题，状态转移矩阵 e^{At} 的计算是必不可少的。所以，对于 e^{At} 算法的进一步研究和改进，对于线性定常系统及控制系统计算机辅助设计，都是一个重要的基本课题。

本文提出的 e^{At} 新算法，由于引进了 Чебышев 多项式[1]，因而所得到的近似公式，几乎就是 e^{At} 的最佳逼近有理分式。从而提高了 e^{At} 的计算精度。

二、状态转移矩阵e^{At}的新算法

根据 Viskovatoff 方法[2]，若 $f(x)$ 可表示为两个幂级数的比

$$f(x)=\frac{\alpha_{10}+\alpha_{11}x+\alpha_{12}x^2+\alpha_{13}x^3+\cdots}{\alpha_{00}+\alpha_{01}x+\alpha_{02}x^2+\alpha_{03}x^3+\cdots},$$

则可得 $f(x)$ 的连分式展开式

$$f(x)=\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{00}+}\ \frac{\alpha_{20}x}{\alpha_{10}}\ \frac{\alpha_{30}x}{+\ \alpha_{20}}\ +\cdots, \tag{1}$$

其中 α_{mn} 的一般计算公式为

$$\alpha_{mn}=\alpha_{m-1,0}\alpha_{m-2,n+1}-\alpha_{m-2,0}\alpha_{m-1,n+1}.$$

因为任何一个定义在 $[a,b]$ 区间上的函数，都可以通过下述线性变换

$$t=\frac{1}{2}(b-a)x+\frac{1}{2}(b+a),$$

本文于1984年9月3日收到。1985年3月4日收到修改稿。

而变为一个定义在〔-1，1〕上的函数

$$g(x)=f\left(\frac{1}{2}(b-a)x+\frac{1}{2}(b+a)\right),$$

所以，我们的讨论可以仅限于在〔-1，1〕上进行。

假定我们要在〔-1，1〕上逼近函数 $F(x)$，若 $F(x)$ 既不是偶函数又不是奇函数，则 $F(x)$ 有连分式展开式[3]

$$F(x)=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2x}{b_2+\cfrac{a_3x}{b_3+\cdots}}}. \tag{2}$$

下面，我们构造如下的 n 阶连分式

$$\Gamma_n(x)=\cfrac{\alpha_1}{b_1+\cfrac{\alpha_2x}{b_2+\cfrac{\alpha_3x}{b_3+\ddots+\cfrac{\alpha_nx}{b_n}}}}, \tag{3}$$

式中　$\alpha_k(k=1,2,3,\cdots,n)$ 由下述方法确定。

已知 n 阶 Чебышев 多项式为

$$T_n(x)=\cos(n\ \arccos x),$$

按其递推公式得

$$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=x^n+t_{n-1}x^{n-1}+t_{n-2}x^{n-2}+\cdots+t_0, \tag{4}$$

其中　t_{n-1}，t_{n-2}，…，t_0 是已知的。

由式(2)、(4)可证明 α_k 的计算公式为

$$\alpha_k=a_k\left[1+(-1)^{n-k}t_{k-1}\prod_{r=k}^{n}\rho_r\right],\ k=1,2,\cdots,n\ . \tag{5}$$

式中

$$\rho_k=\frac{a_{k+1}}{b_k b_{k+1}},\ k=1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

从公式(5)、(6)看出，$\Gamma_n(x)$ 中的 α_k 均由 $F(x)$ 连分式展开的第 $n+1$ 阶渐近分式引导得出，所以它比 $F(x)$ 的第 n 阶渐近分式的逼近度好。同时不难算出，$\Gamma_n(x)-F(x)$ 近似等于一个小常数乘以 $T_n(x)$。而我们又知 Чебышев 多项式 $T_n(x)$ 是区间〔-1，1〕上的最小零偏差多项式，即

$$\max_{-1\le x\le 1}|T_n(x)|=\min\ ,$$

因而用上式所确定的 $\Gamma_n(x)$ 几乎就是 $F(x)$ 的最佳逼近有理分式.

由上述方法，可导出 e^{Ax} 的几乎最佳逼近有理分式. 根据 Viskovatoff 方法，得 e^{Ax} 的连分式展开式

$$e^{Ax}=\frac{1}{1+}\frac{-Ax}{1}\frac{-\frac{A}{2}x}{+\ -1}\frac{-\frac{A}{12}}{+\ -\frac{1}{2}}\frac{\frac{A}{144}x}{+\ -\frac{1}{12}}+\cdots, \tag{7}$$

其渐近分式序列的前五项为

$$1,\ \frac{1}{1-Ax},\ \frac{2+Ax}{2-Ax},\ \frac{6+2Ax}{6-4Ax+A^2x^2},\ \frac{12+6Ax+A^2x^2}{12-6Ax+A^2x^2}. \tag{8}$$

式(8)恰好是 e^{Ax} 的 Pade 逼近[4,5]表达式. 将(7)式变换成(2)式形式. 便得到下面的连分式展开

$$F(x)=e^{Ax}=\cfrac{1}{b_1-\cfrac{Ax}{b_2+\cfrac{Ax}{b_3-\cfrac{Ax}{b_4+\cfrac{Ax}{b_5-\cfrac{Ax}{b_6+\cdots}}}}}},$$

其中 $a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=1,\ a_4=-1,\ a_5=1,\ a_6=-1.$

$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=2,\ b_4=3,\ b_5=2,\ b_6=5.$

当取阶数 $n=5$ 时，e^{Ax} 的 Pade 逼近表达式为

$$e^{Ax}=\frac{12+6Ax+A^2x^2}{12-6Ax+A^2x^2}, \tag{9}$$

这时的 Чебышев 多项式为

$$\frac{1}{16}T_5(x)=x^5-\frac{20}{16}x^3+\frac{5}{16}x.$$

由公式(5)和公式(6)得到

$$\rho_1=-1,\ \rho_2=\frac{1}{2},\ \rho_3=-\frac{1}{6},\ \rho_4=\frac{1}{6},\ \rho_5=-\frac{1}{10},$$

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=\frac{-2303}{2304},\ \alpha_3=1,\ \alpha_4=-\frac{47}{48},\ \alpha_5=1.$$

故

$$\Gamma_5(x)=e^{Ax}=\cfrac{1}{1+\cfrac{(-2303/2304)Ax}{1+\cfrac{Ax}{2+\cfrac{(-47/48)Ax}{3+\cfrac{Ax}{2}}}}}$$

$$=\frac{663552+334080Ax+55296(Ax)^2}{663552-329184Ax+52993(Ax)^2}, \tag{10}$$

显然（10）式比（9）式的逼近度好。

公式（10）仅适用于〔-1，1〕区间，而自动控制系统中，时间 t 是在〔0，a〕区间，所以需对时间 t 作变换，即　$t=\frac{a}{2}(x+1)$。

于是得到

$$e^{At}=e^{\frac{a}{2}(Ax)}\cdot e^{\frac{a}{2}A}. \tag{11}$$

公式（11）即为状态转移矩阵 e^{At} 在区间〔0，a〕内几乎最佳逼近有理分式。

三、e^{At} 的仿真计算

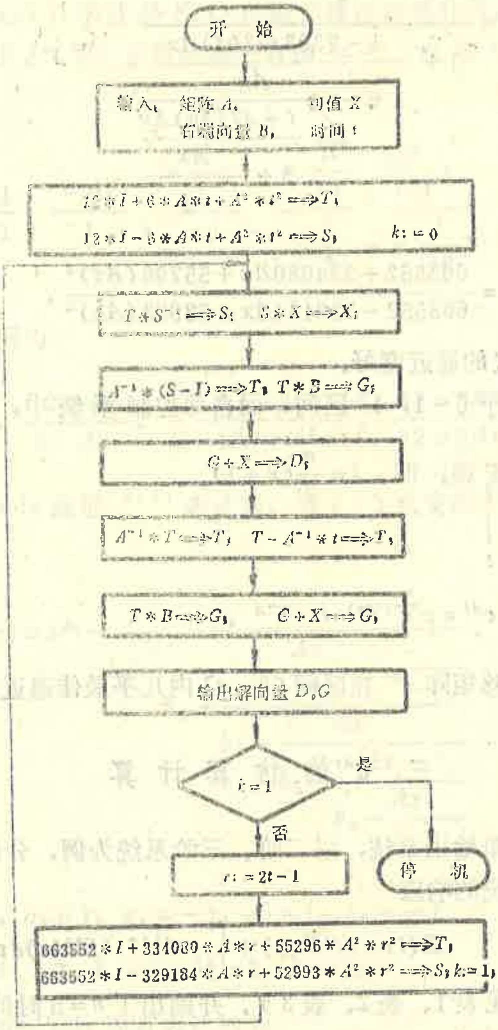
我们选择单输入—单输出系统，以二阶、三阶系统为例，分别对系统在单位阶跃、单位斜坡输入作用下系统的响应[7]

$$X(t)=e^{At}X(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau$$

进行了数字仿真计算（见表1、表2、表3）。并画出了 $n=5$ 时的仿真程序框图。

表 1　二阶系统状态转移矩阵 e^{At} 的仿真结果，传递函数 $W(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$

时间 t	0.1 秒	0.5 秒	1 秒
精确值	$\begin{pmatrix}0.9909441, & 0.0861067\\ -0.1722133, & 0.7326241\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.8451819, & 0.2386512\\ -0.4773024, & 0.1292282\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.6004236, & 0.2325440\\ -0.4650884, & -0.0972089\end{pmatrix}$
本文算式	$\begin{pmatrix}0.9907039, & 0.0859643\\ -0.1719282, & 0.7328109\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.8451819, & 0.2386512\\ -0.4773024, & 0.1292282\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.59469108, & 0.2267486\\ -0.45349719, & -0.08555482\end{pmatrix}$



框图中：D——输入单位阶跃函数时的解向量

G——输入单位斜坡函数时的解向量

表 2　输入为单位斜坡函数时二阶系统的响应 $x_1(t)$

时间 t	0.1 秒	0.5 秒	0.6 秒	1 秒
精确值	$\begin{pmatrix} 0.9910989 \\ -0.1676854 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8597427 \\ -0.3908933 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7699425 \\ -0.3934496 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4344693 \\ -0.2653003 \end{pmatrix}$
本文算式	$\begin{pmatrix} 0.9908496 \\ -0.1673801 \end{pmatrix}$	与精确值相等	$\begin{pmatrix} 0.7699825 \\ -0.3934649 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.427335 \\ -0.2508426 \end{pmatrix}$

表 3　输入为单位阶跃函数时二阶系统的响应 $x_2(t)$

时间 t	0.1秒	0.5秒	0.6秒	1秒
精确值	$\begin{pmatrix} 0.995472 \\ -0.0861067 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.922591 \\ -0.2386512 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8982146 \\ -0.2476174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8002118 \\ -0.2325442 \end{pmatrix}$
本文算式	$\begin{pmatrix} 0.9954811 \\ -0.08608875 \end{pmatrix}$	等于精确值	$\begin{pmatrix} 0.8982266 \\ -0.2476193 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.79734568 \\ -0.22674859 \end{pmatrix}$

四、结　束　语

本文是应用 Чебышев 多项式导出的 e^{At} 在 $[0,t]$ 区间内几乎最佳逼近算式，由于该算式是在一个区间上的最佳，所以在某些时刻可能精度较低，但在整个控制区间内其平均计算精度却显然优于 Pade 逼近法。另外，该算式在进行仿真计算时，其存储量及计算量都不大，所以有一定的使用价值。

参　考　文　献

〔1〕 Davis, P. J., Interpolation and Approximation, New York, Toronto, London, (1963), 128－157.

〔2〕 Хованский, А. Н., Приложиние Цепных Дробей и их Обобщений К Вопросам Лрибплимснного Аналиэа, Мсскеа, (1956), 140－164.

〔3〕 Fike, C. T., Computer Evaluation of Mathematical Functions, Prentice－Hall, INC, (1968), 180－205.

〔4〕 徐利治等，函数逼近的理论与方法，上海科学技术出版社，(1983)，18－20.

〔5〕 谢如彪、杜子华，矩阵指数计算方法综述，上海交大科技，4，(1982)，8－9.

〔6〕 沈阳计算技术研究所，电子计算机常用算法，科学出版社，(1976)，434－444.

〔7〕 南京航空学院等合编，自动控制原理(下册)，国防工业出版社，(1984)，30－33.

A NEW METHOD FOR CALCULATING THE STATE TRANSITION MATRIX e^{At} AND ITS SIMULATION COMPUTATION

Wu Huaying

(Changchun College of Optics and Fine Mechanics)

Abstract

A new method is given in this paper for calaulating the state transition matrix e^{At}. Owing to the application of chebyshev polynomial, all new expressions derived are almost the optimal approximate rational fractions for which e^{At} is on region $[a, b]$. Simulation results of second order systems are also given.

==

（紧接第126页）　它们所反映的实际问题也就一目了然. 书中介绍的每个控制系统的设计方法都是以某一工业装置或设备为核心开展讨论，这些例子富有启发性，学习之后能够触类旁通，举一反三，将是得益不浅. 最后，对每个设计方法同时提供能够方便地用计算机进行计算或处理的算法. 因此，这章的内容不仅具有较高水平的设计思想和方法，同时也具有较强的实践性和适用性.

第四章讨论以偏微分方程和微分时滞方程描述的分布参数系统的控制问题. 无论在理论上和方法上，这方面的内容一般比较复杂和困难，然而，该书以工业过程常见的几个装置为例子，比较成功和巧妙地阐述了最佳控制理论和设计方法. 着重讨论了实用性很强的线性系统的模态（Modal）分解设计方法以及非线性系统的Galerkin 方法. 最后，还沟通了与集中参数系统的联系.

第五章论述了状态估计与随机控制问题，其特点是用一种适用于直观操作的方式进行介绍，使控制系统设计工程师们通过对本章的学习能清楚地看到有用的估计与控制算法是十分重要的，它是了解和分析系统的重要组成部分.

最后一章详细地探讨了一系列控制系统的设计例子. 引导读者如何应用前面几章的理论和方法，综合地进行各种不同的复杂系统的设计，以及如何实现各种工业实际提出的不同性能指标要求. 通过本章的学习，能得到综合设计能力的培养与训练.

总之，该书内容十分丰富新颖，反映了控制系统设计的最新成就，具有较高的理论水平和实用性强的计算技巧. 该书作者的理论造诣深，实际应用能力强，知识面宽广. 全书叙述清晰，文字简练、流畅，语言十分优美.

要学好这本书，要求一般预备知识是矩阵代数、微分方程初步和概率统计基础.

该书作者曾在美国New york州立大学和Wisconsin大学用此书作为高年级大学生和研究生教材.

该书的英文版（至今未见中文译本）曾在厦门大学计算机科学系控制理论专业本科生81级和82级作为选修课开设过.