第3卷 第2期
1986年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.3, No.2
June, 1986

干扰解耦和极点配置组合问题的研究*

刘国荣

（湖南大学）

摘　要

本文用代数方法研究了干扰解耦和极点配置组合问题，导得了存在一个状态反馈控制器使得干扰—输出完全解耦且同时配置闭环系统全部（或部分）极点的充分条件；给出了实现干扰解耦和极点配置的状态反馈阵的一个检验算法．

一、引　言

考虑如下线性定常系统：

$$\dot{x}=Ax+Bu+F\omega,\qquad y=Cx, \tag{1}$$

其中 $x\in R^n$ 为状态向量，$u\in R^r$ 为控制向量，$\omega\in R^l$ 为任意干扰向量，$y\in R^m$ 为输出向量．$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times r}$，$F\in R^{n\times l}$，$C\in R^{m\times n}$．文[1～3]用几何方法研究了该系统干扰解耦问题，但都未给出反馈阵的求法．此外，都是用几何法导出的结论，结论抽象，难于应用．文[4]用代数方法研究了该系统干扰解耦问题，给出了反馈阵的求法，但未考虑系统动态性能．是否存在一个反馈控制器既使得系统（1）干扰—输出完全解耦，又使得其闭环系统具有全部（或部分）指定极点？本文研究了这一问题，导出了问题有解的充分条件，给出了反馈阵的一个检验算法．文末给出了一个例子，验证了本文所得结论．

二、干扰—输出的完全解耦

考虑系统（1），取状态反馈控制规律：

$$u=-Kx+v,\quad （v为外部输入）$$

代入（1）得：

$$\dot{x}=(A-BK)x+Bv+F\omega$$

$$=\bar{A}x+Bv+F\omega, \tag{2a}$$

$$y=Cx, \tag{2b}$$

则

$$y(s)=W(s)\cdot v(s)+W_d(s)\omega(s), \tag{3a}$$

* 中国科学院科学基金资助课题．本文作者的导师是童调生副教授．

本文于1984年11月17日收到．1986年4月7日收到修改稿．

其中
$$W(s)=C(sI-\bar{A})^{-1}B, \tag{3b}$$
$$W_d(s)=C(sI-\bar{A})^{-1}F. \tag{3c}$$
$W_d(s)$ 为干扰—输出传函．干扰—输出解耦即为
$$W_d(s)\equiv 0, \qquad \forall s. \tag{4}$$

为了证明定理1，先给出两个引理：

引理 1　存在一个反馈控制器 $u=-Kx+v$，使系统（1）干扰—输出完全解耦的充要条件是：
$$C(A-BK)^iF=C\bar{A}^iF=0,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1.$$

证　充分性：

由文〔5〕知：
$$(sI-\bar{A})^{-1}=\frac{1}{\phi(s)}\left[p_0(s)I+p_1(s)\bar{A}+\cdots+p_{n-1}(s)\bar{A}^{n-1}\right], \tag{5}$$
其中 $p_0(s)$，$p_1(s)$，$\cdots$，$p_{n-1}(s)$，$\phi(s)$ 均为 s 的多项式。

$\because$　$C\bar{A}^iF=0,\qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$

$\therefore$
$$C(sI-\bar{A})^{-1}F=\frac{1}{\phi(s)}\left[p_0(s)CF+p_1(s)C\bar{A}F+\cdots+p_{n-1}(s)C\bar{A}^{n-1}F\right]$$
$$=0.$$
证毕．

必要性：

将（5）代入（3c）得：
$$W_d(s)=\frac{1}{\phi(s)}\left[p_0(s)CF+p_1(s)C\bar{A}F+\cdots+p_{n-1}(s)C\bar{A}^{n-1}F\right].$$
已知存在一反馈阵K使得 $W_d(s)\equiv 0$，所以有
$$p_0(s)CF+p_1(s)C\bar{A}F+\cdots+p_{n-1}(s)C\bar{A}^{n-1}F=0.$$
而 $p_0(s)$，$p_1(s)$，$\cdots$，$p_{n-1}(s)$ 为阶次互不相同的 s 多项式，所以有
$$CF=0\quad C\bar{A}F=0\cdots C\bar{A}^{n-1}F=0.$$
证毕．

引理 2　若$\mathrm{rank}(CB)=m$，则对于任意的方阵$\Lambda\in R^{m\times m}$，都存在一个$K\in R^{r\times n}$，使得下式成立：
$$C(A-BK)=\Lambda C. \tag{6}$$

证　因$\mathrm{rank}(CB)=m$，所以$[CBB^TC^T]^{-1}$存在，取
$$K=B^TC^T[CBB^TC^T]^{-1}[CA-\Lambda C]. \tag{7}$$
将K代入（6）式左边得：
$$C[A-BB^TC^T(CBB^TC^T)^{-1}(CA-\Lambda C)]=\Lambda C=\text{右边}.$$
证毕．

定理 1　如果1）$CF=0$；2）$\mathrm{rank}(CB)=m$；则存在一个反馈控制器 $u=-Kx+v$ 使系统（1）干扰—输出完全解耦，且反馈阵为

$$K=B^TC^T[CBB^TC^T]^{-1}[CA-\Lambda C], \tag{8}$$

其中　Λ为任意$m\times m$阶实阵.

由引理1、2不难证得定理1，证明从略.

三、具有任意指定极点的干扰解耦控制

定理1解决了干扰—输出解耦问题，但没有考虑系统稳定性．怎样设计一个反馈阵K既使得干扰—输出解耦，又保证系统有满意的动态性能？定理2解决了这个问题．为了证明定理2，先给出一个引理.

引理3　若$\mathrm{rank}(C)=m$，则存在一个非奇异阵T，使得　$CT^{-1}=[I_m\ 0]$．并且

$$T=[T_1^T\ T_2^T]^T,\quad T^{-1}=[\widetilde{T}_1,\ \ \widetilde{T}_2],$$

其中　$T_1=C,\quad T_2=(\widetilde{T}_2^T\widetilde{T}_2)^{-1}\widetilde{T}_2^T,\quad \widetilde{T}_1=C(CC^T)^{-1},$

$\widetilde{T}_2\in R^{n\times(n-m)}$为列满秩阵，且满足$C\widetilde{T}_2=0$.

引理3证明从略.

对系统（1）进行非奇异变换，令$\widetilde{x}=Tx$，代入（1）得:

$$\dot{\widetilde{x}}=\widetilde{A}\,\widetilde{x}+\widetilde{B}u+\widetilde{F}\omega, \tag{9a}$$

$$\dot{y}=\widetilde{C}\,\widetilde{x}, \tag{9b}$$

其中

$$\widetilde{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_1 & \widetilde{A}_2\\ \widetilde{A}_3 & \widetilde{A}_4\end{bmatrix},\quad \widetilde{B}=TB=\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{F}=TF=[\widetilde{F}_1^T\ \widetilde{F}_2^T]^T,\quad \widetilde{C}=CT^{-1}=[I_m\ 0],$$

$\widetilde{A}_1\in R^{m\times m},\quad \widetilde{A}_2\in R^{m\times(n-m)},\quad \widetilde{A}_3\in R^{(n-m)\times m},\quad \widetilde{A}_4\in R^{(n-m)\times(n-m)},$

$\widetilde{B}_1\in R^{m\times r},\quad \widetilde{B}_2\in R^{(n-m)\times r},\quad \widetilde{F}_1\in R^{m\times l},\quad \widetilde{F}_2\in R^{(n-m)\times l}.$

对系统（9），取一个初始反馈控制:

$$u=-\widetilde{K}_0\,\widetilde{x}+v,$$

其中　$$\widetilde{K}_0=[O_{r\times m},\ \ \hat{K}_{r\times(n-m)}], \tag{10}$$

则有　$$\dot{\widetilde{x}}=\widetilde{A}'\,\widetilde{x}+\widetilde{B}v+\widetilde{F}\omega, \tag{11}$$

$$\widetilde{A}'=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_1 & \widetilde{A}_2-\widetilde{B}_1\hat{K}\\ \widetilde{A}_3 & \widetilde{A}_4-\widetilde{B}_2\hat{K}\end{bmatrix}.$$

令

$$\bar{B}=\tilde{B}\tilde{B}^T\tilde{C}^T(\tilde{C}\tilde{B}\tilde{B}^T\tilde{C}^T)^{-1}=\begin{pmatrix} I_m \\ \tilde{B}_2\tilde{B}_1^T(\tilde{B}_1\tilde{B}_1^T)^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_m \\ \bar{B}_2\end{pmatrix}, \tag{12a}$$

$$\hat{A}_0=\tilde{A}_4-\bar{B}_2\tilde{A}_2,\quad \hat{B}_0=\tilde{B}_2-\bar{B}_2\tilde{B}_1。 \tag{12b}$$

为了讨论的方便，定义 $\Sigma(\hat{A}_0, \hat{B}_0)$ 为一个 $(n-m)$ 阶虚拟子系统。

定理 2 如果 1）$CF=0$；2）$\mathrm{rank}(CB)=m$；3）$(\hat{A}_0, \hat{B}_0)$ 可控，则存在一个反馈控制器 $u=-Kx$ 使得：

1）系统（1）的干扰—输出完全解耦；

2）闭环系统具有全部指定极点，且闭环系统全部极点为

$$\lambda[(A-BK)]=\lambda(\Lambda)\cup\lambda[(\hat{A}_0-\hat{B}_0\hat{K})],$$

反馈阵为 $K=(\tilde{K}_0+\tilde{K}')\cdot T$

$$=[\tilde{K}_0+\tilde{B}^T\tilde{C}^T(\tilde{C}\tilde{B}\tilde{B}^T\tilde{C}^T)^{-1}(\tilde{C}\tilde{A}'-\Lambda\tilde{C})]\cdot T, \tag{13}$$

其中 $\lambda(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的特征值，Λ 为可任意选择的 $m\times m$ 阶实阵，T，$\tilde{K}_0$ 分别由引理3和（10）式给出。

证　考虑系统（11），因 $\mathrm{rank}(\tilde{C}\tilde{B})=\mathrm{rank}(CB)=m$，$\tilde{C}\tilde{F}=CF=0$，所以由定理1知，存在一个反馈控制器 $v=-\tilde{K}'\tilde{x}$ 使得系统（11）的干扰—输出完全解耦，这个反馈阵为

$$\tilde{K}'=\tilde{B}^T\tilde{C}^T(\tilde{C}\tilde{B}\tilde{B}^T\tilde{C}^T)^{-1}(\tilde{C}\tilde{A}'-\Lambda\tilde{C})。 \tag{14}$$

由 v 可得 $u=-(\tilde{K}_0+\tilde{K}')\tilde{x}=-(\tilde{K}_0+\tilde{K}')Tx$，所以也就等于说存在一个反馈控制器 $u=-(\tilde{K}_0+\tilde{K}')\cdot Tx$ 使系统（1）的干扰—输出完全解耦。定理2的第一部分证毕。

现在的问题是在什么条件下，通过 Λ 的选择，构造一个适当的 $\tilde{K}'$ 可使闭环系统具有 n 个指定极点。设 $\tilde{A}^*$ 为闭环系统矩阵，即：

$$\tilde{A}^*=\begin{pmatrix}\tilde{A}_1^* & \tilde{A}_2^* \\ \tilde{A}_3^* & \tilde{A}_4^*\end{pmatrix}=\tilde{A}'-\tilde{B}\tilde{K}', \tag{15}$$

$\tilde{A}_1^*\in R^{m\times m}$，$\tilde{A}_2^*\in R^{m\times(n-m)}$，$\tilde{A}_3^*\in R^{(n-m)\times m}$，$\tilde{A}_4^*\in R^{(n-m)\times(n-m)}$.

将（14）代入（15）得：

$$\tilde{A}^*=\tilde{A}'-\tilde{B}\tilde{B}^T\tilde{C}^T(\tilde{C}\tilde{B}\tilde{B}^T\tilde{C}^T)^{-1}(\tilde{C}\tilde{A}'-\Lambda\tilde{C}),$$

即：$\tilde{A}^*=\tilde{A}'-\bar{B}(\tilde{C}\tilde{A}'-\Lambda\tilde{C})$。（见（12a）$\bar{B}$ 的定义）

$$\therefore \quad \overline{B}_\Lambda \widetilde{C} = \widetilde{A}^* - \widetilde{A}' + \overline{B}\widetilde{C}\widetilde{A}' = \overline{\overline{A}}, \tag{16}$$

其中 $\overline{\overline{A}} = \widetilde{A}^* + (\overline{B}\widetilde{C} - I)\widetilde{A}'$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{A}_1^* & \widetilde{A}_2^* \\ \widetilde{A}_3^* + \overline{B}_2\widetilde{A}_1 - \widetilde{A}_3 & \widetilde{A}_4^* + \overline{B}_2(\widetilde{A}_2 - \widetilde{B}_1\hat{K}) - \widetilde{A}_4 + \widetilde{B}_2\hat{K} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{\overline{A}}_1 & \overline{\overline{A}}_2 \\ \overline{\overline{A}}_3 & \overline{\overline{A}}_4 \end{pmatrix}.$$

由(16)知，$\overline{B}_\Lambda$ 有解的充要条件是

$$\operatorname{rank}(\widetilde{C}) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \widetilde{C} \\ \overline{\overline{A}} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

而　$\widetilde{C} = [I_m \quad 0]$,

$\therefore$ (17)式成立的充要条件是：$\overline{\overline{A}}_2 = 0$，$\overline{\overline{A}}_4 = 0$。

为此令 $\overline{\overline{A}}_2 = \widetilde{A}_2^* = 0$, (18a)

$$\overline{\overline{A}}_4 = \widetilde{A}_4^* + \overline{B}_2(\widetilde{A}_2 - \widetilde{B}_1\hat{K}) - \widetilde{A}_4 + \widetilde{B}_2\hat{K} = 0. \tag{18b}$$

由(16)得：$\overline{B}_\Lambda = \overline{\overline{A}}\widetilde{C}^+ = \begin{pmatrix} \overline{\overline{A}}_1 \\ \overline{\overline{A}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \overline{B}_2\Lambda \end{pmatrix}$,

$\therefore$ $\overline{\overline{A}}_1 = \widetilde{A}_1^* = \Lambda$，$\overline{\overline{A}}_3 = \widetilde{A}_3^* + \overline{B}_2\widetilde{A}_1 - \widetilde{A}_3 = \overline{B}_2\Lambda$,

即　$\widetilde{A}_1^* = \Lambda$，$\widetilde{A}_3^* = \widetilde{A}_3 - \overline{B}_2\widetilde{A}_1 + \overline{B}_2\Lambda$.

由(18)得：$\widetilde{A}_2^* = 0$，$\widetilde{A}_4^* = (\widetilde{A}_4 - \overline{B}_2\widetilde{A}_2) - (\widetilde{B}_2 - \overline{B}_2\widetilde{B}_1)\hat{K} = \hat{A}_0 - \hat{B}_0\hat{K}$.

故

$$\widetilde{A}^* = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_1^* & \widetilde{A}_2^* \\ \widetilde{A}_3^* & \widetilde{A}_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ \widetilde{A}_3 - \overline{B}_2\widetilde{A}_1 + \overline{B}_2\Lambda & \hat{A}_0 - \hat{B}_0\hat{K} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

显然，$\lambda(\widetilde{A}^*) = \lambda(\Lambda) \cup \lambda[(\hat{A}_0 - \hat{B}_0\hat{K})]$。而 Λ 可任意选择，$(\hat{A}_0, \hat{B}_0)$ 可控，通过 $\hat{K}$ 的选择可以使 $(\hat{A}_0 - \hat{B}_0\hat{K})$ 的特征值位于任意位置，故 $\widetilde{A}^*$ 的 n 个特征值可任意指定。

由(15)式知，$\widetilde{A}^* = \widetilde{A}' - \widetilde{B}\widetilde{K}' = \widetilde{A} - \widetilde{B}(\widetilde{K}_0 + \widetilde{K}')$，所以也就等于说，通过引入反馈控制器

$$u=-(\widetilde{K}_0+\widetilde{K}')\widetilde{x}=-(\widetilde{K}_0+\widetilde{K}')Tx \tag{20}$$

于系统（1），可以使系统（1）的 n 个极点位于期望的位置．定理的第二部分证毕．

推论 如果 1）$CF=0$；2）$\operatorname{rank}(CB)=m$；3）$(\hat{A}_0,\ \hat{B}_0)$ 可稳定，则存在一个反馈控制器 $u=-Kx$ 使得：

1）系统（1）的干扰—输出完全解耦；

2）闭环系统稳定，且至少有 m 个极点可任意指定，反馈阵由（13）给出．

参照定理 2 的证明，不难证得此推论．

注 1 $\operatorname{rank}(CB)=m$ 的必要条件是 $\operatorname{rank}(C)=m$，$r\geq m$．即输入个数至少等于输出个数．

注 2 由定理 1 知，$CF=0$ 是必要条件之一，所以对于任何 $CF\neq 0$ 的系统，不可实现干扰解耦控制．

为了应用方便，我们综合定理1、2和推论，给出如下具有任意指定极点的干扰解耦问题的一个检验算法．

检验算法：

1． 计算 CF，若 $CF\neq 0$，则转 9；

2． 计算 $\operatorname{rank}(CB)=\rho$，若 $\rho<m$，则转10；

3． 根据引理 3 求得 T，T^{-1}，$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$；

4． 由（12）式求得 $\bar{B}$，$\hat{A}_0$，$\hat{B}_0$；

5． 判断 $(\hat{A}_0,\ \hat{B}_0)$ 的可控（可稳定）性，若 $(\hat{A}_0,\ \hat{B}_0)$ 不可稳定，转9；

6． 确定Λ使之具有 m 个希望特征值(即系统极点)，然后按极点配置方法确定$\hat{K}$，使 $(\hat{A}_0-\hat{B}_0\hat{K})$ 具有剩余的 $n-m$ 个（或部分）希望特征值；

7． 按 $K=(\widetilde{K}_0+\widetilde{K}')T=[(0,\ \hat{K})+\widetilde{B}^T\widetilde{C}^T(\widetilde{C}\widetilde{B}\widetilde{B}^T\widetilde{C}^T)^{-1}(\widetilde{C}\widetilde{A}'-\Lambda\widetilde{C})]\cdot T$

$=[(0,\ \hat{K})+B^TC^T(CBB^TC^T)^{-1}(\widetilde{A}_1-\Lambda,\ \widetilde{A}_2-\widetilde{B}_1\hat{K})]\cdot T$ 求得K；

8． 结束；

9． 问题无解，转 8；

10．问题可能有解也可能无解，对这种情况本文未研究，转8．

四、例

设

$$A=\left(\begin{array}{c:cc}-1.25 & 0.75 & -0.75\\ \hdashline 1 & -1.5 & -0.75\\ 1 & -1 & -1.25\end{array}\right)\qquad B=\left(\begin{array}{cc}1 & 1\\ \hdashline 2 & 0\\ 1 & 1\end{array}\right)\qquad F=\left(\begin{array}{c}0\\ \hdashline 2\\ 5\end{array}\right),$$

$$C=[\,1 \;\vdots\; 0 \quad 0\,].$$

如果问题有解，希望闭环系统极点为 -10，-3，-4.

解 1）$CF=0$，$\mathrm{rank}(CB)=1=m$. 所以解耦问题一定有解；

2）C已为所需形式，故取 $T=I$，有：

$$\widetilde{A}=A,\quad \widetilde{B}=B,\quad \widetilde{C}=C;$$

3）由（12）式可解得：

$$\overline{B}=\begin{bmatrix}1\\ \widetilde{B}_2\widetilde{B}_1^T(\widetilde{B}_1\widetilde{B}_1^T)^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_0=\widetilde{A}_4-\overline{B}_2\widetilde{A}_2=\begin{bmatrix}-2.25 & 0\\ -1.75 & -0.5\end{bmatrix},\qquad \hat{B}_0=\widetilde{B}_2-\overline{B}_2\widetilde{B}_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

可以验证（$\hat{A}_0$，$\hat{B}_0$）完全可控，故结合（1）知，问题有解.

4）取 $\Lambda=-10$，令 $\hat{K}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \hat{K}_3 & \hat{K}_4\end{bmatrix}$，则

$$\hat{A}_0-\hat{B}_0\hat{K}=\begin{bmatrix}-2.25+\hat{K}_3 & \hat{K}_4\\ -1.75 & -0.5\end{bmatrix}.$$

指定（$\hat{A}_0-\hat{B}_0\hat{K}$）的特征值为 -3，-4，可解得：

$$\hat{K}_3=-4.25,\qquad \hat{K}_4=5$$

$$\therefore\qquad \hat{K}_0=[0\ \vdots\ \hat{K}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -4.25 & 5\end{bmatrix};$$

5）$$\widetilde{K}'=B^TC^T(CBB^TC^T)^{-1}(\widetilde{A}_1-\Lambda,\ \widetilde{A}_2-\widetilde{B}_1K)=\begin{bmatrix}4.375 & 2.5 & -2.875\\ 4.375 & 2.5 & -2.875\end{bmatrix},$$

$$K=\widetilde{K}_0+\widetilde{K}'=\begin{bmatrix}4.375 & 2.5 & -2.875\\ 4.375 & -1.75 & 2.125\end{bmatrix}.$$

可以验证，闭环系统既实现了干扰解耦，又具有全部希望的极点.

这例完全证实了本文所导得的结论，同时也说明了本文所提出的设计方法是较简单的.

参 考 文 献

〔1〕 Wonham, W. M. and A. S. Morse, Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems – A Geometric Approach, SIAM J. Control, 8, (1970) 1—18.

〔2〕 Bhattacharyya, S. P., Disturbance Rejection in Linear Systems, INT. J. Systems Sci, **5**, 7, (1974), 633—637.

〔3〕 Chang, M－F, Disturbance Localization in Linear Systems With Simultaneous Decoupling, Pole Assignment, or Stabilization, IEEE Trans. Auto. Contr., AC－**20**, 4, (1975), 518—523.
〔4〕 王世林等，干扰解耦问题，自动化学报，**8**，4，（1982），291—298.
〔5〕 王照林，现代控制理论基础，国防工业出版社，（1981），78—80.

THE STUDY OF THE COMBINATION PROBLEM ON DISTURBANCE DECOUPLING AND POLE ASSIGNMENT

Liu Guorong
(Hunan University)

Abstract

The combination problem on disturbance decoupling and pole assignment is studied with algebraic method in this paper. The sufficiency condition of that there exist a state feedback controller with which we decouple disturbances and outputs and simultaneously assign the all (part) poles of a closed loop system is derived. The test arithmetic to solve the state feedback matrix that decouples disturbances and outputs and assigns systems poles is given out.