第3卷 第3期
1986年9月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 3, No. 3
Sept., 1986

关于线性特征系数的几个问题

程 鹏

（北京航空学院）

摘 要

本文研究了系统具有线性特征系数的条件．在指出文献〔1〕、〔2〕错误的同时，提出了系统具有全部线性特征系数的一个充分条件，并且证明了文献〔1〕的充分条件是这个充分条件的特殊情况．

一、线性特征系数的概念

线性时不变系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \tag{1}$$

其中A、B和C分别是$n\times n$、$n\times m$和$l\times n$的常量矩阵，并且假定$\mathrm{rank}B=m$，$\mathrm{rank}C=l$。系统（1）在输出反馈

$$\mathbf{u} = K\mathbf{y} + \mathbf{V} \tag{2}$$

的作用下所得的闭环系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = (A+BKC)\mathbf{x} + B\mathbf{V} = A_k\mathbf{x} + B\mathbf{V},$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}. \tag{3}$$

开环系统（1）的特征多项式$\pi(A)$为

$$\pi(A) = \lambda^n + f_1\lambda^{n-1} + \cdots + f_{n-1}\lambda + f_n. \tag{4}$$

闭环系统（3）的特征多项式$\pi(A_k) = \pi(A+BKC)$为

$$\pi(A_k) = \lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + \cdots + h_{n-1}\lambda + h_n. \tag{5}$$

（4）式中的f_i是常数，而（5）式中的h_i是反馈矩阵K的元素k_{ij}的函数，根据Leverrier公式，可得

$$f_i = -\frac{1}{i}[\mathrm{tr}A^i + f_1\mathrm{tr}A^{i-1} + \cdots + f_{i-1}\mathrm{tr}A],$$

本文于1984年10月5日收到．1985年6月11日收到修改稿．

$$f_0=1 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{6}$$

和

$$h_i(K)=\frac{-1}{i}[\mathrm{tr}A_k^i+h_1\mathrm{tr}A_k^{i-1}+\cdots+h_{i-1}\mathrm{tr}A_k],$$

$$h_0=1 \quad (i=1,\ 2\cdots,\ n). \tag{7}$$

这里tr$A$表示A阵的迹，由（6）式和（7）式可得

$$h_1(K)=-\mathrm{tr}(A+BKC)=f_1-\mathrm{tr}KCB,$$

$$h_2(K)=\frac{-1}{2}[\mathrm{tr}(A+BKC)^2+h_1\mathrm{tr}(A+BKC)]=f_2-f_1\mathrm{tr}KCB$$

$$-\mathrm{tr}KCAB+\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}KCB)^2-\mathrm{tr}(KCB)^2],$$

$$h_3(K)=f_3-f_2\mathrm{tr}KCB-f_1\mathrm{tr}KCAB-\mathrm{tr}KCA^2B$$

$$+(\mathrm{tr}KCB\mathrm{tr}KCAB-\mathrm{tr}KCBKCAB)+\frac{1}{2}(f_1+\mathrm{tr}KCB)$$

$$\cdot[\mathrm{tr}(KCB)^2-(\mathrm{tr}KCB)^2]+\frac{1}{3}[(\mathrm{tr}KCB)^3-\mathrm{tr}(KCB)^3].$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{8}$$

由（8）式可见，$h_i(K)$由两部分组成，一部分是k_{ij}的线性函数，一部分是k_{ij}的非线性函数。分别用L_i和N_i表示之，即

$$h_i(K)=L_i+N_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{9}$$

用数学归纳法可以证明$h_i(K)$的线性部分满足下列关系

$$L_i=f_i-f_{i-1}\mathrm{tr}KCB-f_{i-2}\mathrm{tr}KCAB-\cdots-f_1\mathrm{tr}KCA^{i-2}B-\mathrm{tr}KCA^{i-1}B. \tag{10}$$

定义[1] 若h_1，h_2，…，h_ν都是k_{ij}的线性函数，即N_1，N_2，…，N_ν均为零，则称系统（1）具有ν—线性特征系数．当$\nu=n$，简称系统为线性特征系统．

对线性特征系统，用输出反馈配置系统极点的问题可化为线性代数方程组的可解性问题．众所周知的并秩设计方法，就是通过K取秩为1，使系统具有线性特征系数，从而使讨论能顺利地进行．由此可见，更一般地研究线性特征系统是有意义的，它最终至少可给出用输出反馈能任意配置极点的一类系统．

二、文献[1]、[2]中的错误

文献[1]提出了以下引理

引理 系统（1）具有ν—线性特征系数，当且仅当下列条件之一成立

（a） $\mathrm{rank}(CA^jB)=\mathrm{rank}(CA^jB+CA^\mu B)=1$

$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-2;\ \mu=j+1,\ j+2,\ \cdots,\ \nu-j-2.$

$$(b)\quad CA^jB=0 \qquad j=0,\ 1,\ \cdots,\ \nu-3.$$

根据这一引理，文献〔2〕论述了即使在B、C选择十分自由的情况下，也不能保证系统（1）成为线性特征系统，因而〔2〕断言实际中不太可能存在线性特征系统。

本文首先要指出的是，上述引理的条件并不必要。文献〔1〕在证明上述引理时，曾经正确地指出：当$N_2=0$时，根据$\mathrm{tr}(KCB)^2=(\mathrm{tr}KCB)^2$可得出$\mathrm{rank}CB=1$（或零）。然而在讨论$h_3$时，〔1〕却错误地由

$$\mathrm{tr}KCB\cdot\mathrm{tr}KCAB=\mathrm{tr}KCBKCAB \tag{11}$$

导出$\mathrm{rank}CB=\mathrm{rank}CAB=\mathrm{rank}(CB+CAB)=1$必然成立的结论。事实上，对$h_3$进行的讨论表明

命题 1　若$CB=\alpha\beta^T$，则$N_3=0$成立的充分必要条件是矩阵

$$\Delta=\begin{bmatrix}0 & \beta^T\\ \alpha & CAB\end{bmatrix} \tag{12}$$

的三阶子式

$$\Delta\begin{matrix}1,\ i,\ j\\ 1,\ i_1,\ j_1\end{matrix}=0 \qquad (1<i,\ j\leq l;\ 1<i_1,\ j_1\leq m).$$

这里α和β^T分别为$l\times1$和$1\times m$的非零向量，而$\Delta\begin{matrix}1,\ i,\ j\\ 1,\ i_1,\ j_1\end{matrix}$表示在矩阵$\Delta$中取第1，$i$，$j$行和第1，$i_1$，$j_1$列所得的子式。

证　在$\mathrm{rank}CB=1$的条件下，容易验证（8）式所给出的$h_3(K)$的表达式的后两项为零，故$N_3=0$当且仅当对任意的K均有（11）式成立。直接计算（11）式的两边可得

$$\mathrm{tr}KCBKCAB=\sum_{j=1}^{m}K_j\alpha\Big(\sum_{i=1}^{m}\beta_iK_i\Big)b_j=\sum_{i=1}^{m}\beta_iK_i\sum_{j=1}^{m}b_jK_j\alpha, \tag{13}$$

$$\mathrm{tr}KCB\,\mathrm{tr}KCAB=\Big(\sum_{i=1}^{m}\beta_iK_i\alpha\Big)\sum_{j=1}^{m}K_jb_j=\sum_{i=1}^{m}\beta_iK_i\Big(\sum_{j=1}^{m}K_jb_j\Big)\alpha, \tag{14}$$

这里K_i是K的第i行，b_j是CAB的第j列，β_i是β^T的第i个分量。由于对任意的K均应有（13）式和（14）式相等，现令K除了第i行和第j行之外均为零，代入（13）和（14）式后可得

$$K_i(\beta_ib_j\alpha^T+\beta_j\alpha b_i^T-\beta_i\alpha b_j^T-\beta_jb_i\alpha^T)K_j^T=0.$$

再令$K_i=[0\cdots0K_{ii_1}0\cdots0]$、$K_j=[0\cdots0K_{jj_1}0\cdots0]$，由上式可知有

$$\beta_ib_{ji_1}\alpha_{j_1}+\beta_j\alpha_{i_1}b_{ij_1}-\beta_i\alpha_{i_1}b_{jj_1}-\beta_jb_{ii_1}\alpha_{j_1}$$

$$= \beta_i \begin{vmatrix} b_{ji_1} & \alpha_{i_1} \\ b_{jj_1} & \alpha_{j_1} \end{vmatrix} - \beta_j \begin{vmatrix} b_{ii_1} & \alpha_{i_1} \\ b_{ij_1} & \alpha_{j_1} \end{vmatrix} = \Delta \begin{matrix} 1, & i, & j \\ 1, & i_1, & j_1 \end{matrix} = 0,$$

由于i, j及i_1, j_1的任意性，必要性证毕. 条件的充分性可由（13）和（14）式展开后直接验证。

显然当$\mathrm{rank}CB = \mathrm{rank}CAB = \mathrm{rank}(CB + CAB) = 1$时，（12）式成立. 但（12）式成立未必导出上述秩为1的条件. 另外在$N_2 = N_3 = 0$的条件下，对h_4的计算可得

$$N_4 = -\frac{1}{2}[\mathrm{tr}(KCAB)^2 - (\mathrm{tr}KCAB)^2] + [\mathrm{tr}KCB\mathrm{tr}KCA^2B - \mathrm{tr}KCBKCA^2B]. \quad (15)$$

若要$N_4 = 0$，显然不一定象[1]那样要求上式中两项分别为零. 所指出的这些错误导致了[1]引理中关于必要性的原则错误. 另外命题1及（15）式表明要想逐步通过使$N_i = 0$给出h_i是线性的充分必要条件将是很困难的.

三、线性特征系统的一个充分条件

文献[1]提出的引理，只是线性特征系数的一个严格的充分条件，根据这一个条件难以构造出线性特征系统. 下列命题给出线性特征系统的另一个充分条件. 由于系统的等价变换不改变系统的线性特征性质，故对能通过等价变换化为这种类型的系统，命题亦成立。

命题 2 如果系统矩阵A、B、C有以下的结构形式

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad}^{n-1-r} \\ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \end{array} \}\, r, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} \}\, r, \quad C = [C_1 \quad \overbrace{0}^{n-1-r}], \quad (16)$$

其中A_1、A_3、A_4、B_1、C_1为适当规模的常量矩阵，r是满足$0 \leq r \leq n-1$的某一整数. 则系统（A、B、C）是线性特征系统。

证　由（16）式直接可得

$$A_K = A + BKC = \begin{bmatrix} A_1 & \overbrace{0}^{n-1-r} \\ A_3 + B_1KC_1 & A_4 \end{bmatrix} \}\, r.$$

$A_3 + B_1KC_1$的每一元素都是k_{ij}的线性函数. 考察$\det[\lambda I - A_K]$，按前r行用拉普拉斯展开，因A_1是$r\times(r+1)$矩阵，那么A_1的每个r阶子式的代数余子式是由（$A_3 + B_1KC_1$）的某一列与A_4组成的矩阵的行列式乘以代数符号，用S_i表示这些矩阵，则有

$$\pi(A_K) = P_1(\lambda)\det S_1 + P_2(\lambda)\det S_2 + \cdots + P_{r+1}(\lambda)\det S_{r+1}, \quad (17)$$

其中$P_i(\lambda)$是λ的多项式，而S_i只有首列元素是k_{ij}的线性函数，其余列均与k_{ij}无关，因

此$\det S_i$是一个系数是k_{ij}线性函数的λ多项式，由（17）式可知，$\pi(A_K)$是系数为k_{ij}线性函数的λ多项式，即（A、B、C）是线性特征系统.

推论2—1　若A为下Hessenberg矩阵，B、C具有以下的结构形式

$$B=\begin{bmatrix}0\\B_1\end{bmatrix}\}r\quad\text{、}\quad C=[C_1\quad\overbrace{0}^{n-1-r}\quad],\tag{18}$$

其中r为满足$0\le r\le n-1$的任一整数，则（A、B、C）是线性特征系统.

推论2—1可以推广到上Hessenberg矩阵，这时B、C矩阵需作相应的更改．由此可得

命题 3　对确定的l、m、n和任意的A阵，均可通过适当选择B、C的元，使得（A、B、C）为线性特征系统.

证　矩阵A通过等价变换可化为有理标准形$\bar{A}$，$\bar{A}=PAP^{-1}$．取$\bar{B}$、$\bar{C}$为（18）式的形式，于是$B=P^{-1}\bar{B}$，$C=\bar{C}P$即为所求．并且可知B、C的选择将是比较自由的.

四、充分条件的比较

对于线性特征系统，命题2给出的充分条件与[1]所提供的充分条件之间有以下关系

命题 4　若系统（A、B、C）满足

$$CA^jB=0\qquad j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-3,$$

则（A、B、C）经等价变换可化为（16）式的形式.

证　因为当$m=1$或$l=1$时，显然有$r=n-1$，因此证明只需对$m+l>3$进行.

在$[B\ AB\cdots A^{n-3}B]$中按列的排列顺序挑选线性无关的列向量，选取原则是它与其所在列位左侧的向量组线性无关．记选出的这些向量为x_1，x_2，$\cdots$，x_q，显然向量组$\{x_i\}$的前m个向量就是B的m列，并且由假设条件可知$\{x_i\}$均在C的核中，故有$m\le q\le\dim\ker C=n-l$．另一方面可知存在整数i_0（$0<i_0<n-3$），使得$[B\ AB\cdots A^{i_0}B]$中就包含了向量组$\{x_i\}$，否则$\{x_i\}$中含有$A^{n-3}B$的列，则应有$q\ge m+n-3$，于是有$n-l\ge m+n-3$，即$m+l\le 3$，这与原先约定矛盾．$i_0<n-3$表明$A^{n-3}B$的列均可由$\{x_i\}$线性表出，即$\{x_i\}$所张成的列空间X是含于C核中的A的不变子空间．由于$\operatorname{Im}B\subset X$，故$X$也是含于$C$核中的（$A$、$B$）不变子空间．令

$$P^{-1}=[x_{q+1}\cdots x_n\quad x_1\cdots x_q],$$

不难验证，$\bar{A}=PAP^{-1}$、$\bar{B}=PB$、$\bar{C}=CP^{-1}$具有（16）式的形式，且$r=n-q-1$.

为了讨论引理中的（a）组条件，先引入以下预备命题

命题 5　若$X_1=\alpha_1\beta_1^T\ne0$、$X_2=\alpha_2\beta_2^T\ne0$、$\operatorname{rank}(X_1+X_2)=1$，则以下结论之一必然成立

①向量α_1与α_2成比例，②向量β_1与β_2成比例.

推论5—1 若 $X_i=\alpha_i\beta_i^T\neq 0$（$i=1, 2, 3$），$\mathrm{rank}(X_1+X_2)=\mathrm{rank}(X_2+X_3)=\mathrm{rank}(X_1+X_3)=1$，则以下结论之一必然成立

①α_i彼此成比例， ②β_i彼此成比例。

命题5和推论5—1都不难证明。今后对于α_i或β_i成比例的情况，不妨认为α_i或β_i^T相等，并且简称为列向量相等和行向量相等。

命题 6 若系统（A、B、C）满足

$$\mathrm{rank}CA^jB=\mathrm{rank}(CA^jB+CA^\mu B)=1,$$

$$j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2,\ \mu=j+1,\ j+2,\ \cdots,\ n-j-2,$$

则（A、B、C）经等价变换可化为（16）式的形式。

证　如同命题4一样，证明只需对$m+l>3$进行。为了确定起见，引进记号$CA^iB=\alpha_i\beta_i^T$，这里$\alpha_i=(\alpha_{i1}\ \alpha_{i2}\cdots\alpha_{il})$，$\beta_i^T=(\beta_{i1}\ \beta_{i2}\cdots\beta_{im})$（$i=0, 1, \cdots, n-l$）。由假设可知$\alpha_i$，$\beta_i$全不为零，不失一般性，可以认为$\beta_{01}=1$，令

$$b_i'=b_i-\beta_{0i}b_1\qquad(i=2,\ \cdots,\ m)。$$

显然$\{b_1b_2'\cdots b_m'\}$是线性无关组，若记$[b_2'\ b_3'\cdots b_m']$为X_0，则有$CX_0=0$。

由命题5及其推论可知，当CB和CAB不是相差一个常数时，在假设的条件下CA^iB（$i=0, 1, \cdots, n-3$）可写成$\alpha_0\beta_i^T$或$\alpha_i\beta_0^T$的形式，而$CA^{n-2}B$可写为$\alpha_0\beta_{n-2}^T$或$\alpha_{n-2}\beta_0^T$的形式，因此可分以下四种情况来构成所需要的向量组X_j。

Ⅰ，$\beta_0=\beta_1=\cdots=\beta_{n-3}=\beta_{n-2}$。令$x_{ji}'=A^jb_i'$（$i=2,\cdots,m$；$j=1, 2, \cdots, n-2$），并记$[x_{j2}'\ x_{j3}'\cdots x_{jm}']$为$X_j$。

Ⅱ，$\beta_0=\beta_1=\cdots=\beta_{n-3}$，$\alpha_0=\alpha_{n-2}$。令$x_{ji}'=A^jb_i'$（$i=2,\cdots,m$；$j=1,2\cdots,n-3$），另取$x_{n-2i}'=A^{n-2}b_i'-(\beta_{n-2i}-\beta_{0i}\beta_{n-21})b_1$（$i=2,\cdots,m$），记$\{x_{j2}'\cdots x_{jm}'\}$为$X_j$。

Ⅲ，$\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-3}=\alpha_{n-2}$。令$x_{ji}'=A^jb_i-\beta_{ji}b_1$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1,2,\cdots,n-2$），记$\{x_{j1}'\ x_{j2}'\cdots x_{jm}'\}$为$X_j$。

Ⅳ，$\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-3}$，$\beta_{n-2}=\beta_0$。令$x_{ji}'=A^jb_i-\beta_{ji}b_1$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n-3$），另取$x_{n-2i}'=A^{n-2}b_i'$（$i=2, \cdots, m$），记$\{x_{ji}'\cdots x_{jm}'\}$为$X_j$（$j=1, 2, \cdots, n-3$），另记$\{x_{n-22}'\cdots x_{n-2m}'\}$为$X_{n-2}$。

由 $x'_{j i}$ 的取法可知，对这四种情况均有 $CX_j=0$ （$j=1,2,\cdots,n-2$）。考虑向量组 $[b_1\ X_0\ X_1\cdots X_{n-2}]$，现按照排列的顺序选择线性无关的列向量，选取的原则是它与其所在列位左侧的向量组线性无关，设选出的这些线性无关的向量为 $\{x_1\ x_2\cdots x_q\}$，并简记为 $\{x_i\}$。显然 $x_1=b_1$，接着有 $m-1$ 个向量就是 b'_i（$i=2,\cdots,m$），故 $q\geq m$；又因为 $Cx_i=0$（$i=2,\cdots,q$），即有 $q-1\leq \dim\ker C=n-l$。根据以上关系可知 $\{x_i\}$ 中的向量不会在 X_{n-2} 中选到，即 X_{n-2} 的列均可由 $\{x_i\}$ 线性表出，这是因为 $\{x_i\}$ 若需在 X_{n-2} 中选，那么就有 $m-1+n-2\leq n-l$，从而有 $m+l\leq 3$，与原先约定相矛盾。

令

$$P^{-1}=[x_{q+1}\cdots x_n\ x_1\cdots x_q],$$

不难验证 $\overline{B}=PB$，$\overline{C}=CP^{-1}$ 具有（16）式的形式，并且 $r=n-q$。现在证明 $\overline{A}=PAP^{-1}$ 也具有（16）式所要求的形式，事实上任取 x_i（$i=2,\cdots,q$），x_i 属于某个 X_j（$j\neq n-2$），现分四种情况来证明 Ax_i（$i=2,\cdots,q$）可为 $\{x_i\}$ 表出。对Ⅰ，Ⅱ，两种情况，$Ax_i\in X_{j+1}$，如果 $j=n-3$，因为 X_{n-2} 可为 $\{x_i\}$ 表出，所以 Ax_i（$i=2,\cdots,q$）可为 $\{x_i\}$ 表出。对情况Ⅲ，有 $Ax_i=A^{j+1}b_{\cdot}-\beta_{j\cdot}Ab_1$，因为 $Ab_1\in[b_1\ X_0\ X_1]$，而 $A^{j+1}b_{\cdot}\in[X_{j+1}\ b_1]$，$X_{j+1}$ 总可由 $\{x_i\}$ 表出，所以 Ax_i（$i=2,\cdots,q$）可由 $\{x_i\}$ 表出。对情况Ⅳ，当 $j\neq n-3$ 时，$Ax_i=A^{j+1}b_{\cdot}-\beta_{j\cdot}Ab_1$ 同理可由 $\{x_i\}$ 表出。当 $j=n-3$，即 x_i 需要在 X_{n-3} 中选取时，这时必有 $m+l=4$，即 $l=m=2$，于是可找出 C 核中的 $n-2$ 个线性无关的向量为

$$b'_2,\ A^k\ b'_2-(\beta_{k2}-\beta_{02}\beta_{k1})\,b_1\qquad(k=1,2,\cdots,n-3),$$

这 $n-2$ 个向量和 b_1 构成了 $\{x_i\}$。由于 $Ab_1\in[\ker C\ \ b_1]$，所以 Ax_i（$i=2,\cdots,q$）可为 $\{x_i\}$ 表出。

对于 CB 和 CAB 相差一个常数的情况，因为 CA^iB（$i=0,1,\cdots,n-4$）仍保持或是行向量相等或是列向量相等的关系。因此当 $m+l>4$ 时，由于构成 $\{x_i\}$ 时取不到与 $CA^{n-3}B$ 相应的项，故证明与前面完全类似。而对 $m+l=4$ 的情况，需参照情况Ⅳ单独处理。至此命题6证毕。

命题6的证明过程是构造出 $\{x_1\ x_2\cdots x_q\}$ 这一含有 C 核中的（A、b_1）不变子空间。实际上，具有（16）式的线性特征系统是和 C 核中是否含有某种特殊的（A、B）不变子空间联系在一起的，这个特殊的（A、B）不变子空间包括了 B 的值域或 B 值域中 $m-1$ 个线性无关的向量。这一有趣的事实表明进一步研究 C 核中的具有特殊形式的（A、B）不变子空间是有意义的。

命题4与命题6的结果表明，文献[1]的充分条件是本文命题2所给出的充分条件的特殊情况。

参考文献

〔1〕 Tarokh, M., On Output Feedback Stabilization and Pole Assignment. Int.J.Control, **31**, 2, (1980), 399—408.

〔2〕 Evans, F.J. and Schlzhs, C., The Structural Aspects of Pole Assignment, Int.J.Control, **34**, 5, (1981), 991—1015.

〔3〕 旺纳姆W.M.著，姚景尹、王恩平译，线性多变量控制（一种几何方法），科学出版社，（1984）.

SOME PROBLEMS ON THE LINEAR CHARACTERISTIC COEFFICIENT

Cheng Peng

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

The condition for systems to have Linear characteristic coefficients is studied in this paper. The mistake in 〔1〕、〔2〕 has been pointed out and a sufficient condition for systems to have Linear characteristic coefficients has been estabilished. It is proved that this sufficient condition can include the c ndition in 〔1〕 as a special case