第3卷 第3期
1986年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 3, No. 3
Sept., 1986

广义线性系统的全状态输出调节

王 源

（中国科学院系统科学研究所）

摘 要

本文讨论了广义线性系统的能稳性，给出了设计广义系统的观测器和动态补偿器的方法，在此基础上讨论了广义系统的全状态输出调节问题，得到能设计动态补偿器使闭环系统是全状态输出调节的充要条件．

一、引 言

本文考虑下列形式的广义线性系统：

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \qquad (t \geq 0) \qquad (1.1)$$

其中 $x \in R^n$、$u \in R^r$、$y \in R^q$分别为系统的状态变量、控制变量和输出变量．$E \in R^{n\times n}$、$A \in R^{n\times n}$、$B \in R^{n\times r}$、$C \in R^{q\times n}$、 $\operatorname{rank} E < n$，但 $\det[sE - A] \neq 0$．

过去十年间，已有许多作者利用代数或几何的方法讨论了广义系统的各种性质和结构，给出广义系统的稳定性、强能控及强能观等性质的判别准则，并得到一些极点配置、二次型最优控制的方法．本文主要讨论广义系统的全状态输出调节问题．输出调节是动态系统的一个重要特性．对于正则系统，这方面已做了许多工作，如何设计动态补偿器使系统是全状态输出调节的问题已在理论上得到解决．本文利用代数方法给出能通过动态补偿使广义系统是全状态输出调节的充要条件及补偿器的设计方法．

二、广义线性系统的动态补偿器

考虑系统

$$\Sigma_1: \begin{cases} E_1\dot{x} = A_1x + B_1u, \\ y = C_1x, \end{cases} \qquad (t \geq 0)$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} E_2\dot{x} = A_2x + B_2u, \\ y = C_2x. \end{cases} \qquad (t \geq 0)$$

如果 Σ_1、Σ_2 的系统阵满足下列关系：

本文于1984年10月16日收到．1985年5月22日收到修改稿．

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sE_1 - A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE_2 - A_2 & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix},$$

其中P、Q均为$n \times n$满秩阵，则称Σ_1、Σ_2是受限等价的（restricted system equivalent 简记为$r.s.e.$）[1]。

易知，$r.s.e.$等价的系统具有相同的零极点结构（包括无穷远零极点）。

引理 2.1[2]　任意一个广义系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (t \geq 0) \tag{2.1}$$

都可通过$r.s.e.$变换化为下列形式：

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u, \tag{2.1$_1$}$$

$$N\dot{x}_2 = x_2 + B_2 u, \qquad (t \geq 0) \tag{2.1$_2$}$$

其中　N是幂零阵．子系统（2.1）$_1$称为慢子系统，子系统（2.1）$_2$称为快子系统．

考虑自由系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1, \\ N\dot{x}_2 = x_2. \end{cases} \qquad (t \geq 0) \tag{2.2}$$

定义 2.1[3]　对于自由系统（2.2），如果存在$M>0$、$\alpha>0$使得对（2.2）的任一解都有

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|x(0_-)\|, \qquad (t \geq 0)$$

则称（2.2）是稳定的．其中，$\|\cdot\|$表示"$\cdot$"的欧氏模．

对于自由系统（2.2），易知（2.2）稳定的充要条件是它的慢子系统稳定．

考虑到$r.s.e.$等价的系统具有相同的零极点结构可得：

引理 2.2　系统$[sE-A]$是稳定的充要条件是它的有限零点都具有负实部．

今后以$\mathbf{N}\{\det[sE-A]\}$表示多项式$\det[sE-A]$的全部有限零点组成的集合．

引理 2.3[3]　系统（2.1）是能稳的充要条件是它的慢子系统（2.1）$_1$是能稳的．

由此不难得到：

定理 2.1　系统$[sE-A\ \ B]$是能稳的充要条件是$\forall s \in \mathbf{C}^+$有：$\mathrm{rank}[sE-A\ \ B]=n$．这里，$\mathbf{C}^+$表示复右半平面全部有限点组成的集合．

定义 2.2　广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax, \\ y = Cx \end{cases} \qquad (t \geq 0) \tag{2.3}$$

是能检测的，如果它的对偶系统

$$E^T\dot{\psi} = A^T\psi + C^T u \qquad (t \geq 0)$$

是能稳的．

引理 2.4　广义系统（2.3）是能检测的充要条件是：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sE-A \\ C \end{bmatrix}=n, \quad \forall s\in C^+.$$

定理 2.2　如果系统

$$\begin{cases} E\dot{x}=Ax+Bu, \\ y=Cx \end{cases} \qquad (t\geq 0) \qquad (2.4)$$

是能检测的，那么可以构造动态系统

$$E\dot{x}_c=A_c x_c+Bu+Gy, \qquad (t\geq 0) \qquad (2.5)$$

满足 $\lim\limits_{t\to\infty}(x_c-x)=0$.

实事上，只要取 G 使 $[sE-(A-GC)]$ 稳定并取 $A_c=A-GC$ 即可.

动态系统（2.5）称为系统（2.4）的状态观测器.

定理 2.3　如果系统（2.4）是能稳、能检测的，那么可以设计动态补偿器使得闭环系统是稳定的.

证　取 K_c 使 $[sE-(A-BK_c)]$ 稳定，取 G 使 $[sE-(A-GC)]$ 是稳定的，构造动态系统

$$E\dot{x}_c=(A-GC)x_c+Bu+Gy, \qquad (t\geq 0)$$

取 $u=-K_c x_c$，闭环系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}=Ax-BK_c x_c, \\ E\dot{x}_c=(A-GC)x_c-BK_c x_c+Gy. \end{cases} \qquad (t\geq 0) \qquad (2.6)$$

可以证明，令 $\hat{x}=x-x_c$，以 $(x^T \ \ \hat{x}^T)^T$ 为状态变量的复合系统（2.6）是稳定的.

三、输出调节系统的结构和性质

考察有干扰作用的广义系统：

$$\begin{cases} E\dot{x}=Ax+Ff, \\ y=C_1x+C_2f, \end{cases} \qquad (t\geq 0) \qquad (3.1)$$

其中　干扰信号 $f\in R^m$ 服从模型

$$E_f\dot{f}=A_0f. \qquad (t\geq 0) \qquad (3.2)$$

定义 3.1　称系统（3.1）是输出调节的，如果：

1. 自由系统 $[sE-A]$ 是稳定的；
2. 对于（3.2）的任一解 $f(t)$ 都有 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$.

将广义动态模型（3.2）化为标准形：

$$\begin{cases} \dot{f}_1=\overline{A}_0 f_1, & (3.2)_1 \\ N_f\dot{f}_2=f_2, & (3.2)_2 \end{cases} \qquad (t\geq 0)$$

考虑系统

$$\begin{cases} E\dot{x}=Ax+F_1f_1+F_2f_2, \\ y=C_1x+C_{21}f_1+C_{22}f_2, \end{cases} \quad (t\geq 0) \tag{3.3}$$

可以得到：

定理 3.1 系统（3.3）对于干扰（3.2）是输出调节的充要条件是系统

$$\begin{cases} E\dot{\tilde{x}}=A\tilde{x}+F_1f_1, \\ \tilde{y}=C_1\tilde{x}+C_{21}f_1, \end{cases} \quad (t\geq 0) \tag{3.4}$$

对干扰（3.2）$_1$是输出调节的。

这个结论表明系统（3.3）对于干扰（3.2）的输出调节性可以化为系统（3.4）对于干扰（3.2）$_1$的输出调节性。

今考虑作用于（3.1）的干扰

$$\dot{f}=A_0f. \tag{3.6}$$

以下总假定 $N\{\det[sI-A_0]\}\subset C^+$，因为从稳态的角度说稳定的信号对于稳定的系统是没有什么影响的。

定理 3.2 对于广义系统（3.1），如果$[sE-A]$是稳定的，那么系统（3.1）对于（3.6）是输出调节的充要条件是存在$L\in R^{n\times m}$使得：

$$AL-ELA_0=F, \tag{3.7}$$

$$C_1L=C_2. \tag{3.8}$$

证 充分性：设有$L\in R^{n\times m}$使（3.7）、（3.8）成立，令$\bar{x}=x+Lf$，则有：

$$E\dot{\bar{x}}=A\bar{x},$$

$$y=C_1\bar{x},$$

由$[sE-A]$的稳定性知$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$，因此，系统（3.1）是输出调节的。

必要性：无妨设系统（3.1）已由$r.s.e.$变换化为标准形：

$$\dot{x}_1=A_1x_1+F_1f,$$

$$N\dot{x}_2=x_2+F_2f.$$

此时，方程（3.7）可写为：

$$A_1L_1-L_1A_0=F_1, \tag{3.7)$_1$}$$

$$L_2-NL_2A_0=F_2. \tag{3.7)$_2$}$$

由于$[sI-A_1]$是稳定的，故方程（3.7）$_1$有唯一解阵，再由N的幂零性知方程（3.7）$_2$有唯一解阵[4]，因此方程（3.7）总有唯一解阵L。

今证 $C_1L=C_2$。令$\tilde{x}=x+Lf$，则有：

$$E\dot{\tilde{x}}=A\tilde{x},$$

$$\mathbf{y}=C_1\tilde{\mathbf{x}}-(C_1L-C_2)\mathbf{f},$$

由此易知 $C_1L=C_2$。

考虑一般的广义系统：

$$\Sigma_o:\begin{cases}E\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}+F\mathbf{f},\\ \dot{\mathbf{f}}=A_o\mathbf{f},\\ \mathbf{y}=C_1\mathbf{x}+C_2\mathbf{f},\\ \mathbf{z}=D_1\mathbf{x}+D_2\mathbf{f},\end{cases}\qquad(t\geq0)$$

这里，$\mathbf{z}$表示系统的p维量测输出。

这里关心的问题是我们能否利用系统 Σ_o 的量测输出 $\mathbf{z}$ 设计动态补偿器

$$\Sigma_c:\begin{cases}E_c\dot{\mathbf{x}}_c=A_c\mathbf{x}_c+B_c\mathbf{z},\\ \mathbf{u}=-K_1\mathbf{x}_c-K_2\mathbf{z},\end{cases}\qquad(t\geq0)$$

使得闭环系统

$$\Sigma_p:\begin{cases}E\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}+F\mathbf{f},\\ E_c\dot{\mathbf{x}}_c=A_c\mathbf{x}_c+B_c\mathbf{z},\\ \mathbf{y}=C_1\mathbf{x}+C_2\mathbf{f},\\ \mathbf{z}=D_1\mathbf{x}+D_2\mathbf{f},\\ \mathbf{u}=-K_1\mathbf{x}_c-K_2\mathbf{z}\end{cases}\qquad(t\geq0)$$

是输出调节的。具有这种性质的补偿器 Σ_c 称为系统 Σ_o 的综合。

由定理 3.2 可以得到：

推论 3.1　假设补偿器 Σ_c 使闭环系统 Σ_p 稳定，则 Σ_p 是输出调节的充要条件是存在L_1、L_2 使得：

$$(A-BK_2D_1)L_1-EL_1A_o-BK_1L_2=F-BK_2D_2,$$
$$B_cD_1L_1+A_cL_2-E_cL_2A_o=B_cD_2,$$
$$C_1L_1=C_2.$$

四、全状态输出调节

考虑一类纯调节系统，即在 Σ_o 中 $C_2=0$，$D_2=0$，$C_1=I$，$\mathrm{rank}F=m$。$C_1=I$ 表示系统的每个状态变量都是调节变量，这种调节系统称为广义全状态输出调节系统。

今有系统

$$\Sigma_{o1}:\begin{cases}E\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}+F\mathbf{f},\\ \dot{\mathbf{f}}=A_o\mathbf{f},\\ \mathbf{z}=D_1\mathbf{x},\end{cases}\qquad(t\geq0)$$

由推论 3.1 可得：

定理 4.1 如果补偿器

$$\Sigma_c: \ E_c\dot{x}_c = A_c x_c + B_c z$$

使闭环系统 Σ_p 稳定，那么 Σ_p 是全状态调节的充要条件是存在 L_2 满足：

$$\operatorname{rank} L_2 = m, \tag{4.1}$$

$$A_c L_2 = E_c L A_o, \tag{4.2}$$

$$-BK_1 L_2 = F. \tag{4.3}$$

定理 4.2 系统 Σ_{o1} 存在一个补偿器使闭环系统 Σ_p 是全状态输出调节的充要条件是：

1. 系统 $\begin{bmatrix} sE-A & F \\ 0 & sI-A_o \\ D_1 & 0 \end{bmatrix}$ 能检测；

2. 系统 $[sE-A \ \ B]$ 能稳；

3. $\operatorname{rank}[B \ \ F] = \operatorname{rank} B$.

证 必要性：无妨设 $[sE_c - A_c]$ 已化为标准形：

$$[sE_c - A_c] = \begin{array}{l} \left[\begin{matrix} sI-\overline{A}_c & 0 \\ 0 & sN_c - I \end{matrix}\right] \begin{matrix} \}n_1 \\ \}n_2 \end{matrix} \end{array},$$

方程 (4.2) 可写为：

$$\overline{A}_c L_{21} = L_{21} A_o, \tag{4.2$_1$}$$

$$L_{22} = N_c L_{22} A_o, \tag{4.2$_2$}$$

这里，$L_2 = \begin{bmatrix} L_{21}^{\tau} & L_{22}^{\tau} \end{bmatrix}^{\tau}$，由 N_c 的幂零性知 $L_{22}=0$，故 $\operatorname{rank} L_{21} = m$。令 $Q_1 = [\underbrace{L_{21}}_{m} \ \ \underbrace{T}_{n_1-m}]$. T 由 L_{21} 满秩扩张得到，再令

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_1 \\ \}n_2 \end{matrix}, \text{可证：}$$

$$Q^{-1} A_c Q = \begin{bmatrix} A_o & \overline{A}_{c3} & 0 \\ 0 & \overline{A}_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} E_c Q = E_c,$$

$$K_1 Q = [K_{11} L_{21} \ \ K_{11} T \ \ K_{12}],$$

且 $-BK_{11}L_{21} = F$.

因此补偿器 Σ_c 化为：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{c1} = A_o\bar{x}_{c1} + \bar{A}_{c3}\bar{x}_{c2} + \bar{B}_{c1}z, \\ \dot{\bar{x}}_{c2} = \bar{A}_{c2}\bar{x}_{c2} + \bar{B}_{c2}z, & (t\geq 0) \\ N_c\dot{\bar{x}}_{c3} = \bar{x}_{c3} + \bar{B}_{c3}z, \end{cases}$$

$$u = -[K_{11}L_{21} \quad K_{11}T \quad K_{12}]\bar{x}_c - K_2 z.$$

令 $\tilde{x}_{c1} = \bar{x}_{c1} + f$，$\tilde{x}_{c2} = \begin{bmatrix} \bar{x}^T_{c2} & \bar{x}^T_{c3} \end{bmatrix}$，闭环系统成为：

$$\begin{cases} E\dot{x} = (A - BK_2D_1)x + F\tilde{x}_{c1} - B\bar{K}_{12}\bar{x}_{c2} \\ \dot{\tilde{x}}_{c1} = A_o\tilde{x}_{c1} + A_{c3}\tilde{x}_{c2} + \bar{B}_{c1}z, & (t\geq 0) \\ E_{c2}\dot{\tilde{x}}_{c2} = A_{c2}\tilde{x}_{c2} + \tilde{B}_{c2}z. \end{cases}$$

这里，$\bar{K}_{12} = [K_{11}T \quad K_{12}]$，$A_{c3} = [\bar{A}_{c3} \quad 0]$，$\tilde{B}_{c2} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{c2} \\ \bar{B}_{c3} \end{bmatrix}$，$[sE_{c2} - A_{c2}]$

$= \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_{c2} & 0 \\ 0 & sN_c - I \end{bmatrix}$. 由 Σ_p 的稳定性知 $\lim\limits_{t\to\infty} \bar{x}_{c1}(t) = 0$，即 $\lim\limits_{t\to\infty}(\bar{x}_{c1} + f) = 0$，

这说明 Σ_p 中的 $\bar{x}_{c1}$ 是对 $-f$ 的估计。

令
$$M = \begin{bmatrix} sE - (A - BK_2D_1) & -F & B\bar{K}_{12} \\ -\bar{B}_{c1}D_1 & sI - A_o & -A_{c3} \\ \tilde{B}_{c2}D_1 & 0 & sE_{c2} - A_{c2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m \\ \}n_{c2} \end{matrix},$$

由闭环系统 Σ_p 的稳定性知对任 $s\in \mathbf{C}^+$ 有

$$\operatorname{rank} M = n + m + n_{c2} = n + n_c.$$

因此，
$$n = \operatorname{rank}[sE - (A - BK_2D_1) \quad -F \quad B\bar{K}_{12}]$$
$$= \operatorname{rank}[sE - A \quad B]\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ K_2D_1 & K_{11}L_{21} & \bar{K}_{12} \end{bmatrix} \qquad \forall s\in \mathbf{C}^+.$$

故有，$\operatorname{rank}[sE - A \quad B] = n$，$\forall s\in \mathbf{C}$。

条件2得证，类似地可证条件1成立，条件3是定理4.1的推论。

充分性：取 K_2 使 $BK_2 = F$，取 K_1 使 $[sE - (A - BK_1)]$ 稳定，取 G_1、G_2 使

$\begin{bmatrix} sE - (A - G_1D_1) & F \\ -G_2D_1 & sI - A_o \end{bmatrix}$ 稳定，构造动态系统

$$\hat{\Sigma}_c: \begin{bmatrix} E\dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - G_1D_1 & F \\ -G_2D_1 & A_o \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} D_1x, \quad (t\geq 0)$$

控制律取为

$$u = -K_1 z_1 - K_2 z_2.$$

令 $x_{c2} = x - z_1$，$x_{c2} = f - z_2$，则有：

$$\begin{pmatrix} E\dot{x} \\ E\dot{x}_{c1} \\ \dot{x}_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BK_1 & BK_1 & BK_2 \\ 0 & A-G_1D_1 & F \\ 0 & -G_2D_1 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{c1} \\ x_{c2} \end{pmatrix} \quad (t \geq 0).$$

由 K_1、G_1、G_2 的取法知此闭环系统是稳定的，即对任 $f(0) = f_0$，都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$，因此，补偿器$\hat{\Sigma}_c$使得闭环系统是全状态输出调节的。

定理 4.2 的充分性的证明实际也给出了设计全状态输出调节补偿器的方法。当 E 为满秩阵即系统为正则系统时，本文的结果与正则系统已有的结果是一致的。

参 考 文 献

〔1〕 Verghese, G., Infinite-frequency Behavior in Generalized Dynamical Systems, Ph. D Dissertation, Dept. Elec. Engin., Stanford University, Dec., (1978).

〔2〕 Verghese, George C., Bernord C. Levy & T. Kallath, A Generalized State-space for Singular Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-26, 4, (1981), 811-831.

〔3〕 Campbell, S. L., Singular Systems of Differential Equations, Pitman Publ., (1980).

〔4〕 须田信英等著，曹长修译自动控制中的矩阵理论，科学出版社，(1979).

FULL STATES OUTPUT REGULATION FOR GENERALIZED LINEAR SYSTEMS

Wang Yuan

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

The paper deals with the problem of full states output regulation for generalized linear systems. Methods for constructing observer and dynamical compensator for generalized systems are introduced. By using the methods, a necessary and sufficient condition for existing a dynamical compensator to make the closed-loop system be full states output regulated is given.