第3卷 第3期
1986年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 3, No.3
Sept., 1986

minimax指标最优定常输出反馈调节器设计方法

罗宗虔　方华京

（华中工学院）

摘　要

本文在T.Yahagi[3,4]工作的基础上进一步讨论了minimax指标最优输出反馈设计方法，并将该方法推广到离散系统.给出了计算方法. 研制了适用于多种指标函数的CSCAD应用软件.

一、引　言

最优输出反馈控制问题是一个如何利用系统中可直接测量的信息构成控制量的问题. 但由于采用标准二次型指标函数时，最优输出反馈矩阵一般与系统的状态初值有关，使得问题的处理比较困难. 有许多学者在这一方面作了大量的工作，其中有代表性的是Levine－Athans[1,2]在统计平均意义下的最优定常输出反馈设计方法和T.Yahagi[3,4]的minimax指标设计方法.

本文进一步讨论minimax指标设计方法.

二、连续系统minimax指标最优输出反馈问题

问题1[3,4]　考虑定常连续系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ \ x(0)=x_0, \tag{2.1}$$

$$y(t)=Cx(t), \tag{2.2}$$

$$u(t)=Fy(t), \tag{2.3}$$

其中 $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$, $y(t)\in R^l$.

求F^*使得

$$J_1(F^*)=\min_{F\in R^{m\times l}}\ \max_{\substack{x_0\in R^n\\ \|x_0\|=1}}\frac{1}{2}\int_0^\infty[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt, \tag{2.4}$$

其中 $Q\geq 0$, $R>0$，分别是$n\times n$, $m\times m$权矩阵.

本文于1984年12月6日收到. 1985年12月收到修改稿.

该问题是下面问题 2 当 $\sigma=0$ 的特例。

问题 2　采用指标函数

$$J_2(F)=\max_{\substack{x_0\in R^n\\ \|x_0\|=1}}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{2\sigma t}[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt. \tag{2.5}$$

其余与问题 1 相同。

定理 2.1　若问题 2 的解 F^* 存在，则闭环系统 $\dot{x}(t)=(A+BF^*C)x(t)$ 具有稳定度 σ。

证　略。

可推出（见附录 A），$A+\sigma I+BFC$ 稳定时，有

$$\frac{\partial J_2(F)}{\partial F}=(RFC+B^TP)LC^T, \tag{2.6}$$

$$P(A+\sigma I+BFC)+(A+\sigma I+BFC)^TP+Q+C^TF^TRFC=0, \tag{2.7}$$

$$L(A+\sigma I+BFC)^T+(A+\sigma I+BFC)L+V_m(P)V_m^T(P)=0, \tag{2.8}$$

$$PV_m(P)=\lambda_m(P)V_m(P),\quad V_m^T(P)V_m(P)=1, \tag{2.9}$$

其中　$\lambda_m(P)$ 是实对称矩阵 P 的最大特征值。

令　$\partial J_2(F)/\partial F=0$ 可得

定理 2.2　问题 2 的解 F^* 满足的必要条件是

$$(RF^*C+B^TP)LC^T=0. \tag{2.10}$$

P，L 是方程（2.7）～（2.9）当 $F=F^*$ 时的解。

问题 3　采用指标函数

$$J_3(F)=\max_{\substack{x_0\in R^n\\ \|x_0\|=1}}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[t^r x(t)^TQx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt. \tag{2.11}$$

其余与问题 1 相同。

可推出，$A+BFC$ 稳定时，有

$$\frac{\partial J_3(F)}{\partial F}=[(RFC+B^TP_r)L_r+r!\,(B^T\sum_{i=0}^{r-1}P_iL_i)]C^T, \tag{2.12}$$

$$P_r(A+BFC)+(A+BFC)^TP_r+(r!\,P_{r-1}+C^TF^TRFC)=0, \tag{2.13}$$

$$P_i(A+BFC)+(A+BFC)^TP_i+P_{i-1}=0,\quad i=r-1,\ r-2,\cdots,1, \tag{2.14}$$

$$P_0(A+BFC)+(A+BFC)^TP_0+Q=0, \tag{2.15}$$

$$L_r(A+BFC)^T+(A+BFC)L_r+V_m(P_r)V_m^T(P_r)=0, \tag{2.16}$$

$$L_i(A+BFC)^T+(A+BFC)L_i+L_{i+1}=0\quad i=r-1,r-2,\cdots,0, \tag{2.17}$$

$$P_r V_m(P_r) = \lambda_m(P_r) V_m(P_r),\quad V_m^T(P_r) V_m(P_r) = 1, \tag{2.18}$$

令 $\partial J_5(F)/\partial F = 0$，可得

定理2.3 问题3的解 F^* 应满足的必要条件是

$$[(RF^*C + B^T P_r) L_r + \gamma! \; (B^T \sum_{i=0}^{r-1} P_i L_i)] C^T = 0, \tag{2.19}$$

P_i，L_i，$i = 0, 1, \cdots, r$ 是方程(2.13)～(2.18) $F = F^*$ 时的解。

三、离散系统minimax指标最优输出反馈问题

问题4 考虑定常离散系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\quad x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

$$y(k) = Cx(k), \tag{3.2}$$

$$u(k) = Fy(k), \tag{3.3}$$

其中 $x(k) \in R^n$，$u(k) \in R^m$，$y(k) \in R^l$。

求 F^* 使得

$$J_4(F^*) = \min_{F \in R^{m\times l}} \max_{\substack{x_0 \in R^n \\ \|x_0\| = 1}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)]。 \tag{3.4}$$

该问题是下面问题5当 $\sigma = 0$ 的特例。

问题5 采用指标函数

$$J_5(F) = \max_{\substack{x_0 \in R^n \\ \|x_0\| = 1}} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\sigma k} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)]， \tag{3.5}$$

其余与问题4相同。

定理3.1 若问题5的解 F^* 存在，则闭环系统 $x(k+1) = (A + BF^*C)x(k)$ 具有稳定度 σ。

证 略。

可推得，$|\lambda_i(e^\sigma A + e^\sigma BFC)| < 1$ $i = 1, 2, \cdots, n$ 时，有

$$\frac{\partial J_5(F)}{\partial F} = [RFC + e^\sigma B^T P (e^\sigma A + e^\sigma BFC)] L C^T, \tag{3.6}$$

$$P - (e^\sigma A + e^\sigma BFC)^T P (e^\sigma A + e^\sigma BFC) = Q + C^T F^T RFC, \tag{3.7}$$

$$L - (e^\sigma A + e^\sigma BFC) L (e^\sigma A + e^\sigma BFC)^T = V_m(P) V_m^T(P), \tag{3.8}$$

$$PV_m(P)=\lambda_m(P)V_m(P),\quad V_m^T(P)V_m(P)=1. \tag{3.9}$$

令 $\partial J_5(F)/\partial F=0$，可得

定理3.2 问题5的解满足的必要条件是

$$[RF^*C+e^{\sigma}B^TP(e^{\sigma}A+e^{\sigma}BF^*C)]LC^T=0, \tag{3.10}$$

其中 P，L 是方程（3.7）～（3.9）$F=F^*$ 时的解。

问题6 采用指标函数

$$J_6(F)=\max_{\substack{x_0\in R^n\\ \|x_0\|=1}}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[k^rx^T(k)Qx(k)+u^T(k)Ru(k)]。 \tag{3.11}$$

其余与问题4相同.

定理3.3 系统 $x(k+1)=(A+BFC)x(k)$ 渐近稳定时，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^rx^T(k)Qx(k)=x_0^T\overline{P}_rx_0, \tag{3.12}$$

$$\overline{P}_i-(A+BFC)^T\overline{P}_i(A+BFC)=(A+BFC)^T\left(\sum_{j=1}^{i}C_i^{i-j}\overline{P}_{i-j}\right)(A+BFC)$$

$$i=r,r-1,\cdots,1, \tag{3.13}$$

$$\overline{P}_0-(A+BFC)^T\overline{P}_0(A+BFC)=Q。 \tag{3.14}$$

证 见附录 B。

据定理3.3，可得，$|\lambda_i(A+BFC)|<1$，$i=1,2,\cdots,n$ 时，有

$$\frac{\partial J_6(F)}{\partial F}=[RFCL_r+B^T\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{i}C_i^jP_j(A+BFC)L_i]C^T,\ (C_0^0=1), \tag{3.15}$$

$$P_r-(A+BFC)^TP_r(A+BFC)=(A+BFC)^T\sum_{j=1}^{r}C_r^{r-j}P_{r-j}(A+BFC)+C^TF^TRFC, \tag{3.16}$$

$$P_i-(A+BFC)^TP_i(A+BFC)=(A+BFC)^T\sum_{j=1}^{i}C_i^{i-j}P_{i-j}(A+BFC)$$

$$i=r-1,r-2,\cdots,1, \tag{3.17}$$

$$P_0-(A+BFC)^TP_0(A+BFC)=Q。 \tag{3.18}$$

$$L_r-(A+BFC)L_r(A+BFC)^T=V_m(P_r)V_m^T(P_r), \tag{3.19}$$

$$L_i-(A+BFC)L_i(A+BFC)^T=(A+BFC)\sum_{j=i+1}^{r}C_j^TL_j(A+BFC)^T$$

$$i=r-1,r-2,\cdots,0, \tag{3.20}$$

$$P_rV_m(P_r)=\lambda_m(P_r)V_m(P_r),\quad V_m^T(P_r)V_m(P_r)=1. \tag{3.21}$$

令　$\partial J_0(F)/\partial F=0$，得

定理 3.4　问题0的解F^*满足的必要条件是

$$[RF^*CL_r+B^T\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{i}C_j^TP_j(A+BF^*C)L_i]C^T=0. \tag{3.22}$$

P_j, L_i $i,j=0,1,\cdots,r$ 是方程（3.16）～（3.21）$F=F^*$时的解。

四、F^* 的计算方法和CSCAD软件

（一）F^*计算步骤

据推导出的梯度公式，基于 BFGS 算法，可得 F^* 计算方法．下面以问题1为例给出计算步骤：

1。取稳定初值 F_1，令 $i=1$。

2。按式（2.6）～（2.9）（令 $\sigma=0$，$F=F_i$）计算$G_i=\left.\dfrac{\partial J_1(F)}{\partial F}\right|_{F=F_i}$。〔注1〕

3。若$\|G_i\|\le\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$，则令 $F^*=F_i$，停止。否则转步4。

4。计算 $\mathrm{col}(S_i)=-H_i\,\mathrm{col}(G_i)$

$$H_i=H_{i-1}+\{\mu_{i-1}\mathrm{col}(\Delta F_{i-1})[\mathrm{col}(\Delta F_{i-1})]^T-H_{i-1}\mathrm{col}(\Delta G_{i-1})[\mathrm{col}(\Delta F_{i-1})]^T$$
$$-\mathrm{col}(\Delta F_{i-1})\cdot[\mathrm{col}(\Delta G_{i-1})]^TH_{i-1}\}/\{[\mathrm{col}(\Delta F_{i-1})]^T\mathrm{col}(\Delta G_{i-1})\}$$
$$\mu_{i-1}=1+\{[\mathrm{col}(\Delta G_{i-1})]^TH_{i-1}[\mathrm{col}(\Delta G_{i-1})]\}/\{[\mathrm{col}(\Delta F_{i-1})]^T\mathrm{col}(\Delta G_{i-1})\}$$
$$\Delta F_{i-1}=F_i-F_{i-1},\quad \Delta G_{i-1}=G_i-G_{i-1}.$$

5。二分法计算最优步长 ρ_i，满足

$$J_1(F_i+\rho_iS_i)=\min_{\rho\ge0}J_1(F_i+\rho S_i).$$

6。令　$F_{i+1}=F_i+\rho_iS_i$，$i+1\to i$，转步2。

（二）Lyapunov 方程的求解方法

求解连续型 Lyapunov 方程，采用了文献〔5〕提供的方法。对离散型方程 $K-D^TKD$

〔注1〕G_i计算中涉及$\lambda_m(P_i)$，$V_m(P_i)$的计算，由于P_i是实对称矩阵，处理较为容易，我们采用了文献〔6〕中的标准子程序 QLMETH．实践表明，效果良好．

$=H$ 本文提出一种展开为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 元联立方程组的方法，结果如下：

用 K，H 的元素 $k(p,q)$，$h(i,j)$（其中 (p,q)，(i,j) 是序列 $(1,1)$，$(1,2)$，$\cdots(1,n)$，$(2,2)$，$(2,3)\cdots(2,n)$，$\cdots(n-1,n-1)$，$(n-1,n)$，(n,n)）构成列向量 kv 和 hv，于是有

$$Vkv=hv,$$

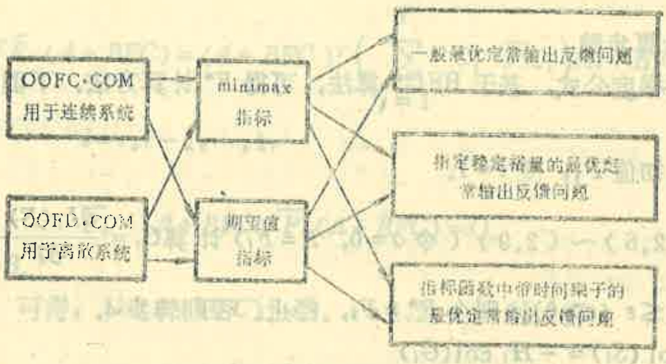
其中　$V=I-T$，I 为单位矩阵，$T=\{t_{(i,j),(p,q)}\}$ 为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 方阵，$t_{(i,j),(p,q)}$ 构造规则是：

若 $p=q$，　则　$d(p,i)\cdot d(q,j)\to t_{(i,j),(p,q)}$；

若 $p\neq q$，　则　$d(p,i)\cdot d(q,j)+d(q,i)\cdot d(p,j)\to t_{(i,j),(p,q)}$。

（三）CSCAD 应用软件简介

经推导可知用 $E\{x_0\,x_0^T\}$ 替换 $V_m(P)V_m^T(P)$ 项，便可得数学期望指标函数梯度公式，因此我们研制了具有如下功能的 CSCAD 应用软件。



五、算　例

例　1[7]　某飞机侧向增稳系统线性化运动方程

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}-0.037 & 0.0123 & 0.00055 & -1.0\\ 0 & 0 & 1.0 & 0\\ -6.37 & 0 & -0.23 & 0.0618\\ 1.25 & 0 & 0.016 & -0.0457\end{pmatrix}x(t)$$

$$+\begin{pmatrix}0.00084 & 0.000236\\ 0 & 0\\ 0.08 & 0.804\\ -0.0862 & -0.0665\end{pmatrix}u(t),$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}x(t).$$

取$Q=I_{4\times4}$，$R=I_{2\times2}$，使用OOFC·COM在IMS－8000微型计算机上计算结果如下：

指标类型	最优输出反馈矩阵F^*			$J(F^*)$	$\sqrt{\sum_{i,j}\left(\frac{\partial J}{\partial f_{ij}}\right)^2}$	迭代次数
minimax $r=0\ \sigma=0$	0.531892 －1.555049	1.736303 －3.753985	8.655113 －6.744527	53.05	0.000107	25
expectation $r=0\ \sigma=0$	0.397523 －1.257534	1.592559 －3.482342	7.852246 －5.004074	〔注2〕 79.53	0.000219	20

例 2 有一线性离散系统

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.1&-0.81\\1.0&0.1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.368&0\\0&0.368\end{bmatrix}u(k),$$

$$y(k)=[1,\ -8.1]x(k).$$

系统开环极点$\lambda_{1,2}=0.1\pm0.9i\ |\lambda_{1,2}|=\rho=0.9055$.

取$Q=0.0001I_{2\times2}$，$R=0.0001I_{2\times2}$，使用OOFD·COM得计算结果：

指标类型	F^*	闭环系统极点	$J(F^*)$	$\sqrt{\sum_{i,j}\left(\frac{\partial J}{\partial f_{ij}}\right)^2}$	迭代次数
minimax $r=0\ \sigma=0$	－0.083998 －0.000964	0.085981±0.747753 i $\rho=0.7526801$	0.000183	0.000099	10
minimax $r=1\ \sigma=1$	－0.267319 0.245161	0.014274±0.114598 i $\rho=0.115484$	0.002201	0.000091	8
expectation $r=0\ \sigma=0$	－0.092229 －0.000196	0.083322±0.731265 i $\rho=0.735997$	0.000314	0.000048	1
expectation $r=1\ \sigma=1$	－0.267276 0.024639	0.014099±0.115197 i $\rho=0.116056$	0.002442	0.000018	8

〔注2〕 由理论分析应有 minimax 指标 $J_1(F_1^*) \geq$ 期望值指标 $\overline{J}_1(F_2^*)$，而例1计算结果中 $(J_1(F_1^*)=53.05) < (\overline{J}_1(F_2^*)=79.53)$，原因在于：此处期望值指标中设 x_0 是均匀分布在 n 维空间单位圆表面的随机变量，这时有：

$$\hat{J}_1 = E\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty (x^TQx+u^TRu)\,dt\right\} = \frac{1}{2n}\int_0^\infty tr[\Phi^T(t,0)(Q+C^TF^TRFC)\Phi(t,0)]dt.$$

对确定的系统，维数 n 是一个常数，所以实际使用的指标函数是

$$\overline{J}_1(F) = n\hat{J}_1(F)。$$

比较两类指标在 F^* 点的大小关系时，需在 x_0 属于同一集合的前提下考虑，这时显然有

$$(J_1(F_1^*)=53.05) > \left(\hat{J}_1(F_2^*)=\frac{1}{n}\overline{J}_1(F_2^*)=\frac{79.53}{4}\right).$$

六、结　论

计算表明采用 minimax 指标最优输出反馈设计方法设计闭环系统能明显改善系统的性能。本文提供的F^*矩阵计算方法切实可行，较 T.Yahagi 算法简单，易于实现。研制的 CSCAD 应用软件为设计控制系统和进一步研究最优输出反馈问题提供了有用的工具。

参 考 文 献

〔1〕 Levine, W.S. and Athans, M., On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-15, 1, (1970), 44-48.

〔2〕 Levine, W. S., Johnson, T. L. and Athans, M., Optimal Limited State Variable Feedback Controllers for Linear Systems, IEEE Trans., AC-16, 6, (1971) 785-793.

〔3〕 Yahagi, T., Minimax Output Feedback Regulators., Trans. of ASME Series G Journal of Dynamic Systems Measurement and Control 98-G, 3, (1976), 270-276.

〔4〕 Yahagi, T. and Balchen, J.G., Optimal Design of Linear Regulator by Minimax Performance Index, Preceeding of the 8th. IFAC, (1981), 487-493.

〔5〕 Chen, C. F. and Shieh, L. S., A Note on Expanding $PA+AP^T=-Q$, IEEE Trans., AC-13, 1, (1968), 122-123.

〔6〕 刘德贵等编，FORTRAN 算法汇编，第二分册，国防工业出版社，（1983）。
〔7〕 Choi, S. S. and Sirisena, H. R., Computation of Optimal Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-19, 3,(1974), 257-258.
〔8〕 须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，（1979）。

附录A 式（2.6）～（2.9）的推导过程如下：

$$d[e^{\sigma t}x(t)]/dt=\sigma e^{\sigma t}x(t)+e^{\sigma t}d[x(t)]/dt=(A+\sigma I+BFC)e^{\sigma t}x(t) \qquad (A.1)$$

解方程（A.1）得

$$e^{\sigma t}x(t)=e^{(A+\sigma I+BFC)t}x(0)。 \qquad (A.2)$$

（A.2）代入（2.5），并令

$$P=\int_0^\infty e^{(A+BFC+\sigma I)^T t}(Q+C^TF^TRFC)e^{(A+BFC+\sigma I)t}dt, \qquad (A.3)$$

则有

$$J_2(F)=\max_{\substack{x_0\in R^n\\ \|x_0\|=1}}\frac{1}{2}x_0^TPx_0=\max_{x_0\in R^n}\frac{1}{2}\frac{x_0^TPx_0}{x_0^Tx_0}。 \qquad (A.4)$$

若$\lambda_i(A+\sigma I+BFC)$，$i=1,2,\cdots,n$ 均有负实部，则有[8]

$$P(A+\sigma I+BFC)+(A+\sigma I+BFC)^TP+Q+C^TF^TRFC=0. \qquad (A.5)$$

设α是矩阵F的一个标量参数，求（A.5）两端对α的导数得

$$\frac{\partial P}{\partial\alpha}(A+\sigma I+BFC)+(A+\sigma I+BFC)^T\frac{\partial P}{\partial\alpha}+(RFC+B^TP)^T\frac{\partial F}{\partial\alpha}C$$

$$+C^T\frac{\partial F^T}{\partial\alpha}(RFC+B^TP)=0, \qquad (A.6)$$

设$L\in R^{n\times n}$满足方程

$$L(A+\sigma I+BFC)^T+(A+\sigma I+BFC)L+V_m(P)V_m(P)^T=0, \qquad (A.7)$$

分别用L右乘（A.6），$\frac{\partial P}{\partial\alpha}$左乘（A.7）两端然后取迹

$$\mathrm{tr}\frac{\partial P}{\partial\alpha}(A+\sigma I+BFC)L=-\mathrm{tr}C^T\frac{\partial F^T}{\partial\alpha}(RFC+B^TP)L, \qquad (A.8)$$

$$\mathrm{tr}\frac{\partial P}{\partial\alpha}(A+\sigma I+BFC)L=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\frac{\partial P}{\partial\alpha}V_m(P)V_m(P)^T, \qquad (A.9)$$

结合（A.8）、（A.9），得

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\frac{\partial P}{\partial\alpha}V_m(P)V_m^T(P)=\mathrm{tr}C^T\frac{\partial F^T}{\partial\alpha}(RFC+B^TP)L. \tag{A.10}$$

在（A.4）中应用 Rayleigh 定理，得

$$J_2(F)=\max_{x_0\in R^n}\frac{1}{2}\frac{x_0^TPx_0}{x_0^Tx_0}=\frac{1}{2}\lambda_m(P)=\frac{1}{2}V_m^T(P)PV_m(P). \tag{A.11}$$

于是有

$$\frac{\partial J_2(F)}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_m^T(P)}{\partial\alpha}PV_m(P)+V_m^T(P)\frac{\partial P}{\partial\alpha}V_m(P)+V_m^T(P)P\frac{\partial V_m(P)}{\partial\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial V_m^T(P)}{\partial\alpha}PV_m(P)+V_m^T(P)\frac{\partial P}{\partial\alpha}V_m(P)\right]. \tag{A.12}$$

注意到 $PV_m(P)=\lambda_m(P)V_m(P)$，$V_m(P)^TV_m(P)=1$，可知

$$2\frac{\partial V_m^T(P)}{\partial\alpha}PV_m(P)=\lambda_m(P)\frac{\partial}{\partial\alpha}[V_m^T(P)V_m(P)]=0. \tag{A.13}$$

（A.13）代入（A.12），得

$$\frac{\partial J_2(F)}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\frac{\partial P}{\partial\alpha}V_m(P)V_m^T(P). \tag{A.14}$$

由链导法则和式（A.10），（A.14），得

$$\frac{\partial J_2(F)}{\partial\alpha}=\mathrm{tr}\left[\frac{\partial J_2(F)}{\partial F}\cdot\frac{\partial F^T}{\partial\alpha}\right]=\mathrm{tr}C^T\frac{\partial F^T}{\partial\alpha}(RFC+B^TP)L. \tag{A.15}$$

由关系式 $\partial[\mathrm{tr}(NY^T)]/\partial Y=N$ 和 $\mathrm{tr}NY^TM=\mathrm{tr}MNY^T$（$N,Y,M$ 是适当维数的实数矩阵），得

$$\partial[\mathrm{tr}(NY^TM)]/\partial Y=MN. \tag{A.16}$$

在（A.15）中令 $\partial F/\partial\alpha=Y$，利用（A.16），得

$$\frac{\partial J_2(F)}{\partial F}=(RFC+B^TP)LC^T. \tag{A.17}$$

综合上述结果，即可得出式（2.6）～（2.9）。

$\frac{\partial J_3(F)}{\partial F}$ 的公式（2.12）～（2.18），$\frac{\partial J_5(F)}{\partial F}$ 的公式（3.6）～（3.9）$\frac{\partial J_6(F)}{\partial F}$ 的公式（3.15）～（3.21）的推导方法与上面的过程类似，这里就不再重复推导了。

附录B　定理3.3的证明如下：

用 $E\{S\}=W_1$ 表示求解方程 $W_1-D^TW_1D=D^TSD$，$H\{S\}=W_2$ 表示求解方程 $W_2-D^TW_2D=S$，$(D=A+BFC,\ |\lambda_i(D)|<1\ \ i=1,2,\cdots,n)$，当 $r=0$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^T(k)Qx(k)=x_0^T\overline{P}_0x_0,\tag{B.1}$$

$$\overline{P}_0=H\{Q\}.\tag{B.2}$$

当 $r=1$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^T(k)Qx(k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}kx^T(k)(\overline{P}_0-D^T\overline{P}_0D)x(k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}[kx^T(k)\overline{P}_0x(k)-(k+1)x^T(k+1)\overline{P}_0x(k+1)]+\sum_{k=0}^{\infty}x^T(k)D^T\overline{P}_0Dx(k)$$

$$=kx^T(k)\overline{P}_0x(k)|_{k=0}-kx^T(k)\overline{P}_0x(k)|_{k\to\infty}+\sum_{k=0}^{\infty}x^T(k)D^T\overline{P}_0Dx(k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x^T(k)D^T\overline{P}_0Dx(k)=x_0^T\overline{P}_1x_0,\tag{B.3}$$

$$\overline{P}_1=H\{D^T\overline{P}_0D\}=E\{\overline{P}_0\}=EH\{Q\}.\tag{B.4}$$

当 $r=2$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^T(k)Qx(k)$$

$$=C_2^1\sum_{k=0}^{\infty}kx^T(k)D^T\overline{P}_0Dx(k)+C_2^2\sum_{k=0}^{\infty}x^T(k)D^T\overline{P}_0Dx(k)$$

$$=x_0^T\overline{P}_2x_0,\tag{B.5}$$

其中 $\overline{P}_2=C_2^1EH\{D^T\overline{P}_0D\}+C_2^2H\{D^T\overline{P}_0D\}$

$$=C_2^1EEH\{Q\}+C_2^2EH\{Q\}$$

$$= E\{C_2^1 EH\{Q\} + C_2^2 H\{Q\}\}$$

$$= E\{C_2^1 \overline{P}_1 + C_2^2 \overline{P}_0\} \; . \tag{B.6}$$

继续上述过程，最后可得：

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{\gamma} x^T(k) Q x(k) = x_0^T \overline{P}_\gamma x_0 \;, \tag{B.7}$$

其中 $\overline{P}_\gamma = E\left\{ \sum_{j=1}^{\gamma} C_\gamma^j \overline{P}_{\gamma - j} \right\}$，

$$\overline{P}_i = E\left\{ \sum_{j=1}^{i} C_i^j \overline{P}_{i-j} \right\}, \tag{B.8}$$

$$\overline{P}_0 = H\{Q\}.$$

再利用关系式 $C_r^i = C_r^{r-i}$ 即得定理3.3．

THE DESIGN METHOD OF MINIMAX PERFORMANCE INDEX OPTIMAL CONSTANT OUTPUT FEEDBACK REGULATORS

Luo Zongqian, Fang Huajing

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

The design method of optimal linear output feedback regulators for linear multivariable systems subjected to minimax performance indices is further discussed, and this design method has been extended to linear discrete-time systems. An algorithm for obtaining an optimal output feedback matrix has been presented. A multifunction CSCAD program has been designed.