第3卷 第3期　　控 制 理 论 与 应 用　　Vol. 3, No. 3
1986年9月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Sept., 1986

具有相对稳定性的状态反馈控制算法

张　珩
（航天工业部七〇四研究所）

摘　要

本文提出了计算状态反馈矩阵的新方法。它不需要了解原开环系统的固有特性，只要任意指定两个矩阵，就能够给出满足相对稳定性要求的状态反馈矩阵。从而，我们较好地解决了线性系统理论中的这一问题。此外，文中还讨论了线性二次型（LQ）控制的逆问题，给出了求解相应的加权矩阵的公式。

一、

由于线性二次型调节器的出现，人们可以不对开环能控的线性系统作任何分析，就直接地给出使闭环系统渐近稳定的状态反馈矩阵。然而，它却无法保证其闭环系统的相对稳定性。这样，人们就提出了更为深刻的课题，即能否找到一组解析算法，它可以直接地给出状态反馈阵，使得闭环系统满足相对稳定性要求。更一般地，这样的状态反馈阵与线性二次型控制的关系如何？显然解决这些问题将具有很大意义。

在这方面，人们一直具有浓厚的研究兴趣[1],[2],[5],[6]。但遗憾的是，目前还没有得到这方面的解析性结果。解决这样的问题，正是本文的目的。我们将证明，通过解一个离散型 Riccati 方程，就能够直接地给出使闭环系统满足相对稳定性约束的状态反馈阵。从而，我们推导出这一问题的解析解。同时，文中还给出了这样的状态反馈阵所满足的 LQ 指标。

二、

考虑一个完全能控的 n 阶开环连续系统（A, B），对它相对稳定性的一种评价规则是其所有闭环极点的实部及其幅角都应当有一个人为规定的上限。不妨将期望的极点工作集用 S_r 表示，显而易见它描述了图1中的阴影区。图中的参量 $\alpha(>0)$ 及 $\beta(0\le\beta<1)$ 是根据人为需要给定的，故期望的相对稳定性也将可以随意确定。

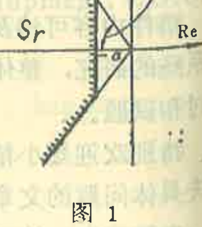

图 1

引理 1[3]　$\mathrm{Re}\,\lambda_i(A)<-\alpha/(1-\beta)$ 的充要条件为 $\mathrm{Re}\,\lambda_i(\alpha/(1-\beta)I+A)<0, i=1, 2, \cdots, n$。这里，$\lambda_i(\cdot)$ 为

本文于1984年4月18日收到。1984年12月12日收到修改稿。

u_*"阵的第 i 个特征值。

引理 2　当且仅当 $\left|\lambda_i\left(\frac{1-\beta}{\alpha\beta}A\right)\right|<1$ 时，有 $|\lambda_i(A)|<\alpha\beta/(1-\beta), i=1,2,\cdots,n$。

由此两个引理出发，不难证明

引理 3　当 $\left|\lambda_i\left(\frac{1-\beta}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\beta}I+A\right)\right)\right|<1$ 时，$\lambda_i(A)\in S_r$，$i=1,2,\cdots,n$。

应当说明，当引理 3 条件成立时，A 阵的特征值 $\lambda_i(A)$ 均在复平面中由 $|s+\alpha/(1-\beta)|<\alpha\beta/(1-\beta)$ 所限定的圆域内，但这圆域又内切于 S_r 平面集，故引理必成立。

定理 1　若偶 (A,B) 完全能控，给定两个矩阵 R 及 Q，满足

$$R=R^T>0,\qquad Q=C^TC\geq 0,\qquad (C,A)\text{能观} \tag{2.a}$$

则必然存在下述状态反馈阵

$$K=-(R+B^TPB)^{-1}B^TP\left(\frac{\alpha}{1-\beta}I+A\right), \tag{2.b}$$

使得 $\lambda_i(A+BK)\in S_r$。式中，$P=P^T>0$ 为下述离散型 Riccati 方程的解，即

$$\begin{aligned}(\alpha\beta/(1-\beta))^2P=&\left(\frac{\alpha}{1-\beta}I+A\right)^TP\left(\frac{\alpha}{1-\beta}I+A\right)\\&-\left(\frac{\alpha}{1-\beta}I+A\right)^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TP\left(\frac{\alpha}{1-\beta}I+A\right)\\&+(\alpha\beta/(1-\beta))^2Q.\end{aligned} \tag{2.c}$$

证　为证明本定理，前已述过，当引理 3 条件成立时，系统矩阵的特征值将处于与 S_r 相内切的圆域内，而离散LQ 调节器恰能给出使闭环特征值均位于单位圆内的反馈阵。由此，我们可以利用离散系统的结论及引理 3 来反演本定理的结果。

不失一般性，利用原开环系统的参数 A、B 构造一离散状态模型为

$$\hat{X}_{k+1}=\frac{1-\beta}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\beta}I+A\right)\hat{X}_k+B\hat{u}_k. \tag{3}$$

依据文[3]，知当 (A,B) 完全能控时，系统 (3) 也完全能控，则可以给出离散型LQ 指标为

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(\hat{X}_k^TQ\hat{X}_k+\hat{u}_k^TR\hat{u}_k), \tag{4}$$

这里，R 和 Q 为满足(2.a)式的任意矩阵，故必有唯一的形如(2.c) 式的离散型 Riccati 方程，则在 $\hat{u}_k=\frac{1-\beta}{\alpha\beta}K\hat{X}_k$ 的反馈规律下，满足指标 (4) 的最优性[4]，这也即说明

在该反馈之下(3)式的闭环系统的所有根均在单位圆之内。再由引理3，则有 $\lambda(A+BK)\in S_r$。

分析定理1，这里所给出的算法有几个显著特点，其一是在求解 K 时不必对 A 阵的特性作任何考察；其二是它对 R 及 Q 阵无任何特殊要求，只需满足一般性条件(2.a)即可。第三，这个算法本身是一个解析性的，而且是可解的代数方程。因此，按照相对稳定性要求求解反馈阵并不比普通的二次型问题增加任何计算量。特别地，根据引理3，不难得知 $\lambda(A+BK)$ 是处在与 S_r 相内切的圆域内，故由该算法所得到的闭环极点的实部不仅有上限，还有确定的下限。这对于 K 阵的实现是很重要的，根据(2)式算法，有

$$-\frac{1+\beta}{1-\beta}\alpha<Re\lambda_i(A+BK)<-\alpha, \tag{5.a}$$

$$|\angle\lambda_i(A+BK)|<\sin^{-1}\beta, \tag{5.b}$$

$$i=1,2,\cdots,n.$$

定理 2　对于线性完全能控的系统

$$\dot{X}=AX+Bu, \tag{6}$$

则由(2)式所给出的状态反馈控制将使下述二次型指标为最优，即

$$J=\int_0^\infty e^{2\alpha t}(X^T\overline{Q}X+u^TM^T\overline{X}+X^T\overline{M}u+u^T\overline{R}u)dt=\min, \tag{7.a}$$

这里，相应的加权阵定义为

$$\overline{Q}=\frac{\alpha\beta}{1-\beta}Q+\frac{1-\beta}{\alpha\beta}(\alpha I+A)^TP(\alpha I+A), \tag{7.b}$$

$$\overline{M}=\frac{1-\beta}{\alpha\beta}(\alpha I+A)^TPB, \tag{7.c}$$

$$\overline{R}=\frac{1-\beta}{\alpha\beta}(R+B^TPB). \tag{7.d}$$

证　由(7.a)式指标所规定的Riccati方程[4]的解为 $\overline{P}$，即

$$\overline{P}(\alpha I+A)+(\alpha I+A)^T\overline{P}-(\overline{M}+\overline{P}B)\overline{R}^{-1}(B^T\overline{P}+\overline{M}^T)+Q=0, \tag{8}$$

$$\overline{K}=-\overline{R}^{-1}(B^T\overline{P}+\overline{M}^T). \tag{9}$$

实际上，由(2.b)式所定义的 K 阵为 $K=-\overline{R}^{-1}(B^TP+\overline{M}^T)$，其中，$\overline{R}$ 及 $\overline{M}$ 如(7.c)及(7.d)式定义。P 即为(2.c)式的解。将之与(9)式比较，显然

$$\overline{K}-K=\overline{R}^{-1}B^T(P-\overline{P}). \tag{10}$$

现将(7.b)、(7.c)及(7.d)代入(8)式中，整理之，并与(2.c)式加以比较，不难得知 $P=\overline{P}$。由此，(9)式即与(2.b)式相一致。到此，定理得证。

由于定理1所提出的算法十分简洁，所以我们很容易得到状态反馈阵。同时，定理2又揭示了(2)式算法与二次型指标最优性之间的关系。这样，我们也将十分容易地得到相应的LQ指标。为说明上述的结果，我们给出一个数值例子。

例 设开环系统为

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,$$

取 $\alpha=2$, $\beta=0.5$，并令

$$R=1,\quad Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},$$

则有

$$P=\begin{bmatrix}118.08&38.50\\38.50&15.67\end{bmatrix},\quad K=[-9.24\ -6.07],$$

再由(7)式，得到相应的LQ指标加权阵为

$$\overline{Q}=\begin{bmatrix}238.16&195.08\\195.08&167.38\end{bmatrix},\quad \overline{M}=\begin{bmatrix}38.50\\34.92\end{bmatrix},\quad \overline{R}=8.34$$

由此反馈，所得到的闭环极点为 $-3.04\pm j0.17$。

三、

综上所述，对于完全可控的线性系统，不必对它进行任何分析，仅依据本文定理1所阐述的简单公式，即可得到满足相对稳定性的约束的状态反馈阵。同时，也可以非常容易地根据(7)式给出所对应的LQ指标。从而，我们较完善地解决了线性系统理论中的这一问题。在本文所提出的算法下，也解决了LQ控制的逆问题。

参 考 文 献

[1] Davison, E. J., Ramash, N., A Note on the Eignevalues of a Real Matrix, IEEE, AC-15, 3, (1970), 252.

[2] Brewr, J. W., Aghabarary, E., On the Design of Feedback Cantrol for Relative Stability, Automatica, **17**, 5, (1981), 771.

[3] Anderson, B. D. O., Moore, J. B., Linear Optimal Control, Prentice-Hall, (1971).

[4] Safonov, M. G., Stability and Robustness of Multi-variable Feedback Systems, MIT Press, (1980).

[5] Anderson, B. D. O., Bose, N. K. and E. I. Jury, A Simple Test

for Zeros of Complex Polynomial in a Sector, IEEE, AC-19, 4, (1974), 437.

[6] Kawasaki, N., Shimemura. E., Determining Quadratic Weighting Matrices to Locate Poles in a Specified Region, Automatica, 19, 5, (1983), 557.

AN ALGORITHM FOR STATE FEEDBACK CONTROL WITH RELATIVE STABILITY

Zhang Heng

(704 Research Institute of Astronotics Industry Department, Beijing)

Abstract

A new scheme to compute the state feedback matrix is developed in this paper. The matrix can be obtained by choosing arbitrarily two matrice and it is not necessary to analyze the characteristics of the open-loop system, so that this problem in linear system theory is solved better. Moreover, the inverse linear quadratic (LQ) control problem is discussed. The formula to solve the weighting matrice is suggested.