第3卷 第3期
1986年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 3, No. 3
Sept., 1986

扰动补偿的Johnson法与最优数字调节器设计*

刘星 童调生

（湖南大学）

摘 要

本文对文[1]中Johnson提出的扰动补偿方法作了分析，并提出了一种最优直接数字控制算法．

一、引 言

如何有效地克服外部扰动对系统的影响，是多年来许多学者共同关心的问题．

本文首先研究了一种由实际问题产生的特殊情况．即某些对象，其连续系统模型用Johnson法求出的扰动补偿增益为零；而如果将该模型离散化后再设计数字控制算法，仍可用Johnson法获得非零扰动补偿增益．然后本文提出了一种最优数字控制算法．综合思想是：扰动前馈仅用来改善动态抗扰性能，静态性能用积分作用来保证．所得算法易于用微机实现．

二、扰动补偿的Johnson法

考虑连续系统

$$\mathring{X}(t)=FX(t)+GU(t)+HW(t), \tag{1a}$$

$$Y(t)=CX(t), \tag{1b}$$

其中 X为状态，U为控制，W为扰动，Y为输出．$F\in R^{n\times n}$，$G\in R^{n\times r}$，$H\in R^{n\times p}$，$C\in R^{m\times n}$均为常值矩阵．且假定$\operatorname{rank}G=r$，$\operatorname{rank}H=p$．

Johnson的思想是将控制分成两部分，即令

$$U=U_R+U_C, \tag{2}$$

其中 U_R用于调节状态，U_C用于补偿扰动．

将（2）代入（1a），有

* 中国科学院科学基金资助课题．

本文于1984年11月19日收到．1985年12月9日收到修改稿．

$$\dot{X}(t)=FX(t)+GU_R(t)+(GU_C(t)+HW(t)). \tag{3}$$

现在要选择 U_C 使括号内之值最小.

1. 扰动补偿的抵消法

如能找到 U_C 使

$$GU_C=-HW, \tag{4}$$

则系统完全不受扰动影响，扰动作用被抵消.

(4)式成立当且仅当

$$R[H]\subseteq R[G], \tag{5}$$

这里R[·]表示[·]之列向量组成的空间.条件(5)简单地意味着 $\mathrm{rank}[G\vdots H]=\mathrm{rank}[G]$.这时

$$\Gamma_1=(G^TG)^{-1}G^TH, \tag{6}$$

$$U_C=-\Gamma_1W(t). \tag{7}$$

2. 扰动补偿的最小化方法

如(5)不满足，则选择 U_C 使 $\|GU_C+HW\|$ 最小. 这时有

$$\Gamma_2=G^+H, \tag{8}$$

$$U_C=-\Gamma_2W(t). \tag{9}$$

分析条件(5)知，如 H 之各列向量可由 G 之各列向量的线性组合来表示，则可运用 Johnson 之抵消法，这时 $\mathrm{rank}[G\vdots H]=\mathrm{rank}[G]$；如 H 中有某列向量与 G 之各列向量都线性无关，则只能运用 Johnson 之最小化方法，这时 $\mathrm{rank}[G\vdots H]>\mathrm{rank}G$；如果 H 之每一列向量与 G 之各列向量都分别正交，则用 Johnson 法求出的前馈增益为零，这时有 $G^TH=0$. G 与 H 正交的系统是一类特殊系统.

三、特殊系统离散模型分析与扰动补偿

设(1)中 $G^TH=0$ 来研究. 这时系统(1)之 Johnson 增益为零. 将(1)在采样周期 T 下离散化，有

$$X(k+1)=AX(k)+BU(k)+DW(k), \tag{10a}$$

$$Y(k)=CX(k), \tag{10b}$$

其中 $A=e^{FT}$, $B=\Phi G$, $D=\Phi H$, $\Phi=\int_0^T e^{Ft}dt$.

对于(1)与(10)，有

定理 1 对于 G 与 H 正交的系统(1)，其离散形式之 Johnson 增益不再为零的必要条件是 Φ 非正交阵.

证 反证法. 设 Φ 是正交阵，则有 $\Gamma_1=(B^TB)^{-1}B^TD=(G^T\Phi^T\Phi G)^{-1}G^T\Phi^T\Phi H=0$, 在所作假定下又有 $\Gamma_2=\Gamma_1=0$. 必要性得证.

如(10)能用 Johnson 法来设计，那么是最小化方法还是抵消法呢？下面考虑这个问题.

由文献[2]定理3.2之证明及定理4.18，有

引理 如采样周期的选择保证了系统(10)的能控性，则Φ必定是可逆阵.

由上述引理知$\mathrm{rank}[B \vdots D]=r+p$，因此有

定理 2 对于G与H正交的系统(1)，其离散形式(10)如能控且可用Johnson法补偿扰动，则必定只能用最小化方法设计.

注意到$F=I$(单位阵)时$\Phi=(e^T-1)I$，又有

推论 如(1)之系统矩阵F是单位阵且G与H正交，则其离散形式之Johnson增益为零.

四、最优数字控制算法的综合

设(10)中$B^TD\neq 0$且$\mathrm{rank}[B \vdots D]\neq \mathrm{rank}[B]$，对其综合控制算法.

由Johnson法有

$$\mathbf{U}_C(k)=-(B^TB)^{-1}B^TD\mathbf{W}(k), \tag{11}$$

再对

$$\mathbf{X}(k+1)=A\mathbf{X}(k)+B\mathbf{U}_R(k), \tag{12a}$$

$$\mathbf{Y}(k)=C\mathbf{X}(k) \tag{12b}$$

设计算法.(12a)两边取一阶向后差分，有

$$\nabla\mathbf{X}(k+1)=A\nabla\mathbf{X}(k)+B\nabla\mathbf{U}_R(k), \tag{13}$$

“∇”为一阶向后差分算子. 又设$\mathbf{Y}_0$为希望的输出，定义输出误差

$$\mathbf{e}(k)=\mathbf{Y}(k)-\mathbf{Y}_0, \tag{14}$$

则有

$$\mathbf{e}(k+1)=\mathbf{e}(k)+CA\nabla\mathbf{X}(k)+CB\nabla\mathbf{U}_R(k). \tag{15}$$

作增广系统

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}(k+1)\\ \nabla\mathbf{X}(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & CA\\ 0 & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}(k)\\ \nabla\mathbf{X}(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}CB\\ B\end{bmatrix}\nabla\mathbf{U}_R(k), \tag{16}$$

或记为

$$\widetilde{\mathbf{X}}(k+1)=\widetilde{A}\widetilde{\mathbf{X}}(k)+\widetilde{B}\widetilde{\mathbf{U}}_R(k), \tag{17}$$

其中 $\widetilde{A}=\begin{bmatrix}I & CA\\ 0 & A\end{bmatrix}$, $\widetilde{B}=\begin{bmatrix}CB\\ B\end{bmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{X}}(k)=[\mathbf{e}^T(k) \quad \nabla\mathbf{X}^T(k)]^T$,

$\widetilde{\mathbf{U}}_R(k)=\nabla\mathbf{U}_R(k)$. 设(17)是能控的，则在性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\{\widetilde{\mathbf{X}}^T(k)\widetilde{Q}\widetilde{\mathbf{X}}(k)+\widetilde{\mathbf{U}}_R^T(k)\widetilde{R}\widetilde{\mathbf{U}}_R(k)\} \tag{18}$$

下，可求出最优控制

$$\widetilde{U}_R(k) = -\widetilde{K}\,\widetilde{X}(k). \tag{19}$$

若记 $\widetilde{K} = [\widetilde{K}_1 \quad \widetilde{K}_2]$，则

$$U_R(k) = -\widetilde{K}_1 \sum_{j=0}^{k} e(j) - \widetilde{K}_2 X(k). \tag{20}$$

总控制为

$$U(k) = -\widetilde{K}_1 \sum_{j=0}^{k} e(j) - \widetilde{K}_2 X(k) - (B^T B)^{-1} B^T D W(k). \tag{21}$$

所得控制中包含了输出误差的积分、全状态反馈以及扰动前馈．只要适当选择权矩阵，就可获得满意的快速性和动态抗扰性，同时系统无静差．

五、应 用 举 例

一个实际的直流调速系统如下式

$$\begin{bmatrix} \dot{n}(t) \\ \dot{I}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 425.12 \\ -1.01 & -38.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(t) \\ I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.28 \end{bmatrix} U(t) + \begin{bmatrix} -425.12 \\ 0 \end{bmatrix} I_{fz} \tag{22}$$

其中 n 是转速，I 是电枢电流，U 是电枢电压，I_{fz} 是等效负载电流．

取采样周期 $T = 10$ 毫秒，将（22）离散化，有

$$\begin{bmatrix} n(k+1) \\ I(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.981104 & 3.50401 \\ -0.008325 & 0.664102 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(k) \\ I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1360 \\ 0.0600 \end{bmatrix} U(k) + \begin{bmatrix} -4.2236 \\ 0.01889 \end{bmatrix} I_{fz}. \tag{23}$$

不难验证本系统是一种前文所述的特殊系统．

设负载扰动是常值，n_0 为给定转速，$e(k) = n(k) - n_0$，取权矩阵

$\widetilde{Q} = \begin{bmatrix} 0.38 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\widetilde{R} = 5$，解离散 Riccati 方程得两个控制

$$U_1(k) = -0.238329 \sum_{j=0}^{k} e(j) - 5.77948 n(k) - 22.6243 I(k),$$

$$U_2(k) = -0.238329 \sum_{j=0}^{k} e(j) - 5.77948 n(k) - 22.6243 I(k) + 25.9182 I_{fz}.$$

进行数字仿真，得以下数据及仿真曲线.

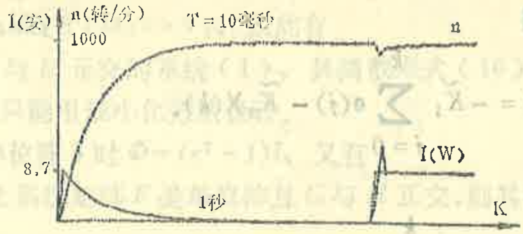

图1　不补偿扰动的仿真曲线

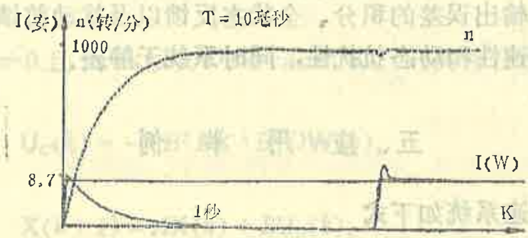

图2　补偿扰动（Johnson法）的仿真曲线

仿　真　数　据

	给定转速（转/分）	启动过渡过程时间（秒）	突加负载动态速降（转/分）	恢复时间（秒）
补偿前（$U_1(k)$）	1000	0.74	66	0.34
补偿后（$U_2(k)$）	1000	0.74	26	0.10

参　考　文　献

〔1〕 Johnson, C. D., Accommodation of External Disturbances in Linear Regulator and Servomechanism Problems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC—**16**, 6, （1971）, 635—644.

〔2〕 何关钰，线性控制系统理论，辽宁人民出版社，（1982），160—225.

JOHNSON'S METHOD ON ACCOMMODATION OF EXTERNAL DISTURBANCES AND THE DESIGN OF A DIGITAL OPTIMAL REGULATOR

Liu Xing, Tong Diaosheng

(Hunan University, Changsha)

Abstract

This paper analyzes Johnson's method on the accommodation of external disturbances and proposes a kind of optimal control algorithm based on this method.