第3卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No. 4
1986年12月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1986

分散固定模的结构

郑毓蕃　　韩正之
（华东师范大学）　（上海徐汇区业余大学）

摘　要

本文对分散控制系统定义了分散输入固定模和它的重数，给出了它与分散固定模集的关系，并就两个控制站 $v=2$ 的情况给出了它的计算方法。特别，本文还定义了单个控制站的最大能控结构，并发现了在系统第一站具有最大能控结构时，输入固定模的重数与 C_2 不能观子空间及 B_1 不能控商空间之间的关系，使得本文所得的结论能推广到站数 v 大于 2 的情况。

一、引　言

自从S. H. Wang 和 E. J. Davison 给出分散系统的分散固定模的定义以后[1]，对分散固定模的研究一直是线性大系统理论最重要的课题之一。近年涌现的许多文章以不同形式给出了系统是否存在分散固定模的判据[2,3]，从而越来越多的人对进一步研究分散固定模的结构产生了兴趣。B. D. O. Anderson 在文献〔4〕中提出了分散固定模重数的新概念，并对特殊情况作出了解答。建立两个控制站的分散固定模重数的一般结论是本文的主要目的。而且这里得到的结论还可以推广到一般场合，只是形式更为繁复罢了。

有 v 个控制站的分散系统（C、A、B；v），它的状态空间表达式是

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+[B_1B_2\cdots B_v]\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_v(t)\end{pmatrix}=Ax(t)+Bu(t), \tag{1a}$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\\vdots\\y_v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_v\end{pmatrix}x(t)=Cx(t), \tag{1b}$$

B、C 和 $u(t)$的意义可以从（1）直接推知。$B_i\in\mathrm{R}^{n\times m_i}$、$C_i\in\mathrm{R}^{r_i\times n}$，且假定 $\mathrm{rank}B_i=m_i$，$\mathrm{rank}C_i=r_i$，$i\in\underline{v}\triangleq\{1,2,\cdots,v\}$。文章总假定$(A$、$B)$是能控的，$(C$、$A)$是能观的，

本文于1985年1月3日收到。1985年7月16日收到修改稿。

且(1)是强关联的. 记

$$\mathbf{K} \triangleq \{K; K = \text{block diag}(K_1 \cdots K_\nu),\ K_i \in \mathbf{R}^{m_i \times r_i},\ i \in \underline{\nu}\},$$

Λ表示$(C、A、B;\nu)$的分散固定模集, 即$\Lambda = \bigcap\limits_{K \in \mathbf{K}} \sigma(A+BKC)$, $\sigma(\cdot)$是$(\cdot)$的谱集.

$A+BKC$以后也常简记成A_K.

分散系统的特征子空间$\mathbf{S}^{(\tau)}(\lambda)$和$\mathbf{T}^{(\tau)}(\lambda)$定义为[5]

$$\forall \tau \subset \underline{\nu},\ \tau \neq \phi(\text{空集}),$$

$$\mathbf{S}^{(\tau)}(\lambda) = \{x; x \in \mathbf{X}, (A-\lambda I)x \in \sum_{i \in \tau} \text{Im} B_i\},$$

$$\mathbf{T}^{(\tau)}(\lambda) = \{x; x \in \mathbf{X}, (A'-\lambda I)x \in \sum_{i \in \tau} \text{Im} C_i'\}.$$

其中$\mathbf{X}$是状态空间. 以后线性空间的基域总取成复数域$\mathbf{C}$. 特征子空间的性质请参阅〔6〕, 引用时不再证明.

二、分散输入固定模和分散输出固定模

定义 1 $\bar{\Lambda}_i^C = \bigcap\limits_{KF} \sigma(A+AKC+B_iF)$, $\bar{\Lambda}_i^O = \bigcap\limits_{KG} \sigma(A+BKC+GC_i)$; 其中$F \in \mathbf{R}^{m_i \times n}$, $G \in \mathbf{R}^{n \times r_i}$和$K \in \mathbf{K}$. $\bar{\Lambda}_i^C$称是(1)关于B_i的分散输入固定模集, $\bar{\Lambda}_i^O$称是(1)关于C_i的分散输出固定模集.

由定义1立即可得到下面的定理:

定理 1 $\bar{\Lambda}_i^C = \phi$的充分必要条件是对几乎所有的$K \in \mathbf{K}$都能使(A_K, B_i)是能控的.

定理1给出了Λ和$\bar{\Lambda}_i^C$的一个比较. 众以周知, $\Lambda = \phi$, 则对几乎所有的$K \in \mathbf{K}$都能使对任意一个$i \in \underline{\nu}$, (C_i, A_K, B_i)是能控能观的[5]. 而$\bar{\Lambda}_i^C = \phi$一般只能对这个i, 有几乎所有的$K \in \mathbf{K}$, 使(A_K, B_i)是能控的. 同时也看出$\bar{\Lambda}_i^C$只是Λ的子集.

引理 2 $\nu = 2$时, $\lambda \in \bar{\Lambda}_1^C$的充分必要条件是

$$\dim[\ker C_2 \cap \mathbf{S}^{(1)}(\lambda)] > m_1. \tag{2}$$

引理2的证明见于〔3〕或〔7〕, 这里不再赘述.

以$\mathbf{P}\underline{\nu}(1)$表示$\underline{\nu}$中一切含有1的真子集. 例如$\nu = 4$时, $\mathbf{P}\underline{\nu}(1) = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},$

$\{1,4\},\{1,2,3\}\{1,2,4\},\{1,3,4\}\}$. 一般它有 $2^{\nu-1}-1$ 个元素（$\underline{\nu}$ 的子集）。现在可以叙述引理 2 的一般结论。

定理 3　当 $\nu\geq 2$ 时，$\lambda\in\Lambda_1^C$ 的充分必要条件是

$$\exists\tau\in P\underline{\nu}(1),\quad \bar{\tau}\text{ 是 }\tau\text{ 在 }\underline{\nu}\text{ 中的余集，使得}$$

$$\dim[\ker C_{\bar{\tau}}\cap S^{(\tau)}(\lambda)]>\sum_{i\in\tau}m_i,$$

其中 $C_{\bar{\tau}}=\begin{bmatrix}C_{j_1}\\ \vdots\\ C_{j_n}\end{bmatrix}$　$\bar{\tau}=\{j_1\cdots j_n\}$.

证　这里只给出 $\nu=3$ 的证明，一般情况可以类似地用数学归纳法得到。

充分性：倘若 $\dim[\ker C_3\cap S^{(1,2)}(\lambda_0)]>m_1+m_2$，则据引理2

$$\forall K_3\in R^{m_3\times r_3},\ \operatorname{rank}[\lambda_0 I-A-B_3K_3C_3\ \ B_1B_2]<n,$$

则 $\forall K_2\in R^{m_2\times r_2}$,

$$\operatorname{rank}[\lambda_0 I-A-B_3K_3C_3-B_2K_2C_2\ \ B_1]\leq\operatorname{rank}[\lambda_0 I-A-B_3K_3C_3-B_2K_2C_2\ \ B_1B_2]<n.$$

其余情况可以完全类似地证得。

必要性：假如条件不满足，$\forall\lambda\in C$,

$$\dim[\ker C_{2,3}\cap S^{(1)}(\lambda)]\leq m_1,\tag{3}$$

$$\dim[\ker C_3\cap S^{(1,2)}(\lambda)]\leq m_1+m_2,\tag{4}$$

$$\dim[\ker C_2\cap S^{(1,3)}(\lambda)]\leq m_1+m_3.\tag{5}$$

从（4）式得到，存在 $K_3\in R^{m_3\times r_3}$，使得 $\forall\lambda\in C$,

$$\operatorname{rank}[\lambda I-A-B_3K_3C_3\ \ B_1B_2]=n,$$

这时 $\dim[\ker C_{2,3}\cap S^{(1)}(\lambda)]\dim=[\ker C_{2,3}\cap S_{K3}^{(1)}(\lambda)]\leq m_1$（[7]或参考下文的引理5），其中 $S_{K3}^{(1)}(\lambda))=\{x;x\in X,(A+B_3K_3C_3-\lambda I)x\in\operatorname{Im}B_1\}$. 则

$$\exists(K_2\ \bar{K}_2)\in R^{m_2\times(r_2+r_3)},\text{ 使得 }\forall\lambda\in C,$$

$$\operatorname{rank}\left[\lambda I-A-B_3K_3C_3-B_2[K_2\ \bar{K}_2]\begin{bmatrix}C_2\\ C_3\end{bmatrix}\ \ B_1\right]=n,$$

$$\text{或}\quad\operatorname{rank}\left[\lambda I-A-B_2K_2C_2-[B_2\ \ B_3]\begin{bmatrix}\bar{K}_2\\ K_3\end{bmatrix}C_3\ \ B_1\right]=n.\tag{6}$$

引理2的必要性说明这时必有

$$\dim[\ker C_3 \cap S_{K_2}^{(1)}(\lambda)] \leq m_1. \tag{7}$$

于是对几乎所有的 $K_2 \in R^{m_2 \times r_2}$ 能使(7)成立，由(5)同时可使得 $[A_{K_2}\ (B_1 B_3)]$ 能控，这就是 $\nu=2$ 的情况了，再应用引理2，就存在 $K_3 \in R^{m_3 \times r_3}$ 使 $(A+B_2K_2C_3+B_3K_3C_3\ B_1)$ 成为能控。

从定理3的证明不难看出，如果(3)～(5)式成立，那末对几乎所有的 $K \in K$，都能使 $(A_K\ \ B_1)$ 成为能控。

定理4 $\forall i \in \underline{\nu}, \Lambda = \Lambda_i^{\bar{c}} \cup \Lambda_i^{\bar{o}}$.

证 根据定义1与定理1，立即可知 $\Lambda \supset \Lambda_i^{\bar{c}} \cup \Lambda_i^{\bar{o}}$.

另一方面，$\forall \lambda \overline{\in} \Lambda_i^{\bar{c}} \cup \Lambda_i^{\bar{o}}$，根据定理1，容易看出，对几乎所有的 $K \in K$，λ 是 (C_i, A_K, B_i) 能控又能观模式，从而有 $K_i \in R^{m_i \times r_i}$，使得 $\lambda \overline{\in} \sigma(A_K + B_iK_iC_i)$[8].

引理5[3] $\dim[\ker C_2 \cap S^{(1)}(\lambda)] = m_1 + l\ (l \geq 0)$ 的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = n - l.$$

引理5说明 $\dim[\ker B'_{\bar{\tau}} \cap T^{(\tau)}(\lambda)] > \sum_{i \in \tau} r_i$，等价于 $\dim[\ker C_\tau \cap S^{(\bar{\tau})}(\lambda)] > \sum_{i \in \bar{\tau}} m_i$，这样我们也能用 $(A, B_{\bar{\tau}})$ 的特征子空间 $S^{(\bar{\tau})}(\lambda)$ 来判断 $\Lambda_i^{\bar{o}}$ 中的元素了，应用这个注解，立即可以得到定理3和定理4的如下推论。

推论6 $\Lambda = \phi$ 的充分必要条件是 $\forall \lambda \in C$，对 $\underline{\nu}$ 的任意一个非空真子集 τ 都成立

$$\dim[\ker C_{\bar{\tau}} \cap S^{(\tau)}(\lambda)] \leq \sum_{i \in \tau} m_i.$$

推论7 $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\nu} \Lambda_i^{\bar{c}} = \bigcup_{i=1}^{\nu} \Lambda_i^{\bar{o}}$.

三、分散输入固定模的重数

上文的定理4和推论7说明，要考察分散固定模的重数，可以转而讨论分散输入固定模或者分散输出固定模的重数。本节讨论 $\nu=2$ 时分散输入固定模重数的计算问题。为了叙述方便，固定 $i=1$，其余情形可以作完全类似的讨论。

记 $\mathbf{R}_K^{(1)}=\langle A_K/\mathrm{Im}B_1\rangle$，$\overline{A}_K$ 是 A_K 在 $\mathbf{X}/\mathbf{R}_K^{(1)}$ 上的诱导映照，$\overline{A}_K$ 关于 λ 的特征子空间记成 $\overline{\mathbf{X}}_{K,\lambda}$。cyc(·)表示(·)的循环指数。为了下文需要，先给出如下引理，并略去其简单的证明。

引理 8 如果 $\mathrm{cyc}(A)=\mu$，那末对任意的B，$\mathrm{cyc}(\overline{A})\leq\mu$。

定义 2 $\lambda\in\Lambda_1^{\overline{E}}$，记$l_\lambda=\min\limits_{K\in\mathbf{K}}(\dim\overline{\mathbf{X}}_{K,\lambda})$，则称 λ 是(1)关于 B_1 的 l_λ 重分散输入固定模。

分散输入固定模重数的意义在于：如 $l=\max\limits_{\lambda\in\Lambda_1^{\overline{C}}} l_\lambda$，那末至少将 B_1 扩充 l 个向量，才能找到 $K\in\mathbf{K}$ 使 $(A_K,[B_1b_1\cdots b_l])$是能控的，这对研究最优反馈结构很有意义。

下面讨论 l_λ 的计算问题。

$\forall\lambda\in\Lambda_1^{\overline{C}}$，根据引理 2 必有 $\overline{l}_\lambda>0$，使

$\dim[\ker C_2\cap\mathbf{S}^{(1)}(\lambda)]=m_1+\overline{l}_\lambda$，即 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda I-A & B_1\\ C_2 & 0\end{bmatrix}=n-\overline{l}_\lambda$。利用前一式容易推知：$\forall K\in\mathbf{K}$，$\dim\overline{\mathbf{X}}_{K,\lambda}\geq\overline{l}_\lambda$，从而 $l_\lambda\geq\overline{l}_\lambda$。下文要构造一个 $K\in\mathbf{K}$，使得 $\dim\overline{\mathbf{X}}_{K,\lambda}=\overline{l}_\lambda$，于是 $l_\lambda\leq\overline{l}_\lambda$。

令 $A^\circ=A$，将(C_2,A,B_1)按下面步骤进行变换

$$\text{i}\quad\begin{pmatrix}A & B_1\\ C_2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{（即作相似变换}T_1\text{）}]{\text{对}(A,B_1)\text{作能控分解}}\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & B_{11}\\ 0 & \overline{A}_{22} & 0\\ C_{21} & \overline{C}_{22} & 0\end{bmatrix},\tag{8}$$

$$\text{ii}\quad\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & B_{11}\\ 0 & \overline{A}_{22} & 0\\ C_{21} & \overline{C}_{22} & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{（先作反馈}F_1\text{，再作相似变换}T_2\text{）}]{\text{消去}\overline{A}_{12}\text{成对角块矩阵}}$$

$$\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & B_{11}\\ 0 & \overline{A}_{22} & 0\\ C_{21} & \widetilde{C}_{22} & 0\end{bmatrix},\tag{9}$$

其中反馈 F_1 是使 $\sigma(\overline{A}_{11}+B_{11}F_1C_{11})\cap\sigma(\overline{A}_{22})=\phi$。根据强关联假定总可使得 $C_{21}\neq0$。只要$\widetilde{C}_{22}\neq0$，总可作下面第 iii 步。

$$\text{iii}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & B_{11} \\ 0 & \overline{A}_{22} & 0 \\ C_{21} & \widetilde{C}_{22} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{（即作相似变换}T_3\text{）}]{\text{对}(\widetilde{C}_{22},\overline{A}_{22})\text{作能观分解}}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & B_{11} \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$\forall\lambda\in\mathbf{C}$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda I-A_{11} & 0 & B_{11} \\ 0 & \lambda I-A_{22} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}[\lambda I-A_{11}\ B_{11}]$$

$$+\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I-A_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} = n_1+n_2,$$

其中n_1、n_2分别是A_{11}、A_{22}的列数（=行数），根据引理2，对几乎所有的$K_2\in\mathbf{R}^{m_2\times r_2}$，都使

$$\left(\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix}K_2(C_{21}\quad C_{22})\quad \begin{pmatrix} B_{11} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

成为能控对，其中B_2经T_1、T_2和T_3三次变换成为$B_2\to\begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \end{pmatrix}$，这样令

$A^1=A+B_2K_2C_2$，再重复i时$\overline{A}_{11}$的列数不小于n_1+n_2。而$\operatorname{cyc}(\overline{A}_{22})$却不会增加（引理8）。直至$\widetilde{C}_{22}=0$，上述循环结束.

但是，即使（9）中$\widetilde{C}_{22}=0$，一般依旧有$\Lambda_1^C\underset{\neq}{\subset}\sigma(\overline{A}_{22})$。设

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I-A_{11} & B_{11} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix}=n_1+\mu_\lambda,$$

那末

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda I-A_{11} & 0 & B_{11} \\ 0 & \lambda I-\overline{A}_{22} & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}=n+\mu_\lambda-\dim\overline{\mathbf{X}}_\lambda=n-\overline{l}_\lambda. \tag{11}$$

引理9 $\lambda\in\Lambda_1^C$的充要条件是$\lambda\in\sigma(\overline{A}_{22})$且$\dim\overline{\mathbf{X}}_\lambda>\mu_\lambda$.

这可以从（11）和引理5得到证明，略去其详细叙述。

最后在（9）的基础上构造 K_2，实现 $\dim\overline{\mathbf{X}}_{K,\lambda}=\dim\overline{\mathbf{X}}_\lambda-\mu_\lambda=\overline{l}$。

将 $\overline{A}_{22}$ 通过相似变换 T_4 成为 Jordan 型。

$$(\overline{A}_{22}\ \ B_{22})\xrightarrow[\text{（相似变换}T_4\text{）}]{}\left(\begin{pmatrix} J_1 & & & 0\\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_P\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{22}^{(1)}\\ B_{22}^{(2)}\\ \vdots\\ B_{22}^{(P)}\end{pmatrix}\right),$$

$$J_i=\left[\begin{array}{ccc:ccc:c:ccc}
\lambda_i & 1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & 1 & & & & & & & \\
 & & \lambda_i & & & & & & & \\ \hdashline
 & & & \lambda_i & 1 & & & & & \\
 & & & & \ddots & 1 & & & & \\
 & & & & & \lambda_i & & & & \\ \hdashline
 & & & & & & \ddots & & & \\ \hdashline
 & & & & & & & \lambda_i & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots & 1\\
 & & & & & & & & & \lambda_i
\end{array}\right]_{\overline{n}_i\times\overline{n}_i}$$

$$B_{22}^{(i)}=\left(\begin{array}{c} \vdots\\ b_{i_1}\\ \hdashline \vdots\\ b_{i_2}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \vdots\\ b_{i\overline{n}_i}\end{array}\right)\qquad \lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j).$$

$(\overline{A}_{22}\quad B_{22})$能控保证 $B_i^*=\begin{pmatrix} b_{i_1}\\ \vdots\\ b_{i\overline{n}_i}\end{pmatrix}$ 行满秩，而（11）说明对固定的 $\lambda\in\overline{\Lambda}_1^C$ $(C_{21}\quad 0)$中有 μ 行与$(\lambda I-A_{11}\quad B_{11})$的行线性独立。不仿就认为第1列$\mu$行。选取 K，使 KC_2 的第 i_1 行…第 i_μ 行分别是 $(C_{21}\quad 0)$ 的第1到第 μ 行，其余全为0。那末

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\lambda I-A_{11} & 0 & B_{11}\\ KC_{21} & \lambda I-\overline{A}_{22} & 0\end{pmatrix}=n-(\dim\overline{\mathbf{X}}_\lambda-\mu)=n-\overline{l}_\lambda. \qquad (12)$$

取 $K_2=B_i^{*T}(B_i^* \quad B_i^{*T})^{-1}K$，这时 $\mathrm{rank}[\lambda I-A-B_2K_2C_2 \quad B_1]=n-\dim\overline{\mathsf{X}}_{K_2,\lambda}=n-l_\lambda$。从(12)可以看出对几乎所有的 K_2 都成立 $\dim\overline{\mathsf{X}}_{K_2,\lambda}=\bar{l}$，因而当 λ 在 $\bar{\Lambda}_1^C$ 中变动时，有一个公共的 K_2，使得

$$\forall\lambda\in\bar{\Lambda}_1^C \quad \bar{l}=\dim\overline{\mathsf{X}}_{K_2\lambda}\geq l_\lambda. \ 0$$

定义 3　如果有 $K\in\mathsf{K}$，使 $\dim\overline{\mathsf{X}K,\lambda}=\min$，$\dim\langle A_K/\mathrm{Im}B_1\rangle=\max$，则称 K 使 B^1 达到最大能控结构，也简称达到 B_1 最大结构。

上面的讨论，以及从 $\langle A_K|\mathrm{Im}B_1\rangle$ 的定义可以得到

定理 10　当达到 B_1 最大结构时

i　$l_\lambda=\bar{l}=\dim\overline{\mathsf{X}}_{K,\lambda}$，

ii　在 C_2 不能观子空间中正好有 $\bar{l}$ 个线性无关的 A_K 的关于 λ 的特征向量，而且它们在 $\mathsf{X}/\mathsf{R}_K^{1}$ 上的投影也线性无关。

从上面的讨论不难发现，对几乎所有的 $K\in\mathsf{K}$，都能达到 B_1 的最大结构。

四、一 个 例 子

$\nu=2$ 的分散系统

$$\left(\begin{array}{c:cc} A & b_1 & b_2 \\ \hdashline c_1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc:ccc:cc} 0 & 1 & & 0 & & 0 & 0 \\ -6 & -5 & & & & 1 & 0 \\ \hdashline & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & -5 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{13}$$

$\sigma(A)=\{-2,-3,-1,-1,-5\}$，利用引理 5 和推论 6，不难验证 $\Lambda=\{-1\}$。-1 是 b_2 的能控模式，定理 4 和推论 7 说明 $-1\in\bar{\Lambda}_1^C$，$-1\in\bar{\Lambda}_2^O$。

对 A_{22} 而言 -1 是它的两重特征根，但是

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & \lambda+5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & \lambda+7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\lambda=-1} = 4.$$

定理10说明它只是 b_1 的简单(一重)分散输入固定模，而且对几乎所有的 K_2，都能实现 $\dim \overline{\mathbf{X}}_{K_2,-1}=1$. 取 $K_2=1$，

$$(\lambda I - A + B_2K_2C_2 \quad B_1) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & \lambda+5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 11 & \lambda+7 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

当 $\lambda \neq -1$ 时，(14)的秩为5，当 $\lambda=-1$ 时，它的秩为4，$\dim \overline{\mathbf{X}}_{1,-1}=1$. 而且由于 $\overline{\Lambda}_1^C \neq \phi$，这时 $\dim\langle A_K/\mathrm{Im}\, b_1\rangle = 4$ 也达到最大.

五、结 束 语

上文定义了分散系统的分散输入固定模和分散输出固定模，建立了它们与通常分散固定模之间的关系，还给出了它们的判别方法. 如果系统存在分散固定模，要求通过局部反馈达到某一个控制站能控又能观已是不可能的了. 但还可能对某些控制站讲它们是能控的，对另一些讲它们是能观的. 例如上例中对几乎所的 $K \in \mathbf{K}$，系统对 b_2 是能控的，而对 c_1 是能观的，把具有这类性质的控制站区分出来，加以利用，这无疑是很有意义的事.

本文首次定义了分散输入固定模的重数，并就两个控制站给出了计算方法. 特别是最大结构的概念，以及最大结构下重数与不能观子空间、不能控商空间的关系的发现，使得定理10有可能推广到一般场合，作者另外著文专述.

参 考 文 献

〔1〕 Wang, S. H. & Davison, E. J., On the Stability of Decentralized Control Systems, IEEE AC-**18**,5, (1973),473—47ε.

〔2〕 Davison, E. J. & Özgeruner, U., Characterizations of Decentralized Fixed Modes for Interconnected Systems, Automatica, **19**, 2, (1983), 169—182.

〔3〕 Zheng Yufan & Han Zhengzhi, What Can be Done for Linear Systems by Feedback? , Proceeding to IFAC'84, (1984).
〔4〕 Anderson, B. D. O., Transfer Function Matrix Description of Decentralized Fixed Mode, IEEE AC-27, 6, (1982), 1176—1182.
〔5〕 Zheng Yufan & Han Zhengzhi, The Description of Properties of Decentralized Systems by (A, B)-Characteristic Subspace, Proceeding to MTNS-85, Sweden, (1985).
〔6〕 郑毓蕃、韩正之，线性控制系统(A、B)特征子空间(Ⅰ)，控制理论与应用，1，3，(1984)，92—103.
〔7〕 郑毓蕃、韩正之，分散控制系统的局部反馈和分散固定模，控制理论与应用，2,4,(1985),1—8.
〔8〕 郑毓蕃、韩正之，线性控制系统的(A、B)特征子空间(Ⅱ)，控制理论与应用，2，1，(1985)，53—60.

ON THE STRUCTURE OF DECENTRALIZED FIXED MODE

Zheng Yufan (East-China Normal University, Shanghai)

Han Zhengzhi (Shanghai Xuhui District Part-time College)

Abstract

In this paper the decentralized input fixed mode and its multiplicity of decentralized systems are defined, its relations with decentralized fixed mode are given, and the method for calculating the multiplicity with two stations, $\nu=2$, is advanced. Especially, we define the largest controllability structure for single station. We discover the relationship between the multiplicity of input fixed mode and the subspace that is both uncontrollable by B_1 and unobservable by C_2 when the decetralized system has reached the largest controllability structure for the first station. The results given here can be genelized into the case that ν is greater than 2.