

连续时间模型参数的一种 直接估计方法

徐南荣 袁利金

(南京工学院) (浙江大学)

摘 要

本文提出一种在频率域内直接估计随机动态系统的连续时间模型参数的快速迭代算法。该算法将时域的广义误差法推广到频率域。在估计模型参数的过程中, 所得到的是关于参数的线性正则方程组。避免了非线性估计所带来的困难。附录中证明了所得到的参数估计量是一致的。数字仿真的例子也表明本文所提出的算法是有效的。

一、引言

大多数工程系统是连续时间系统。为了进行数学仿真和控制, 往往要求获得该类系统的连续时间模型, 尤其是系统参数具有某种物理意义的时候, 更有必要估计出其连续模型的参数。当前, 根据实际系统的采样数据, 采用离散时间估计方法已是辨识连续系统模型的主要手段。文献[1、2、3]采用输出误差法在频率域内直接辨识了连续模型的参数。但是这种方法所得到的是一组关于待估参数的强非线性正则方程。方程的求解比较困难, 而且往往还不能保证参数估值的精度。本文将时间域内采用的广义误差法应用于频率域, 提出了直接估计系统的连续模型参数的快速算法, 该算法所得到的参数估计量是一致的。文中并给出了数字仿真的例子。

二、待识系统及辨识算法

设待识系统是一个渐近稳定的线性连续时间系统 S (图1a), $h(t)$ 是它的脉冲响应特性。 $u(t)$ 、 $x(t)$ 分别是 S 的输入和输出。 $\eta(t)$ 是系统所受到的随机干扰。当以等间隔时间 T_s 对该系统的输入、输出信号进行采样, 则整个系统可用图1(b)所示的模型来描述。在模型中, 我们用在输出端等效的随机噪声序列 $\{v(k)\}$ 来描述系统所受到的干扰, 并认为, $\{v(k)\}$ 与系统输入信号 $\{u(k)\}$ 是不相关的, 噪声 $\{v(k)\}$ 是各态历经的具有有理谱密度的平稳随机序列, 其均值为零, 方差为 σ^2 。

在零起始条件下, 系统 S 可用下面的频率特性来描述:

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(j\omega)^i}{1 + \sum_{i=1}^n a_i(j\omega)^i} \quad (1)$$

$$A(j\omega) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i(j\omega)^i,$$

$$B(j\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(j\omega)^i.$$

系统的输出方程为

$$y(k) = x(k) + v(k), \quad (2)$$

$$x(k) = x(kT_s) = x(t) \big|_{t=kT_s},$$

$$u(k) = u(kT_s) = u(t) \big|_{t=kT_s}.$$

当已选定系统模型的结构参数 n 下, 待估的连续系统模型的参数就是 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 和 $b_i (i=0, 1, \dots, n-1)$. 它们用参数向量 θ_s 来表示:

$$\theta_s = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]^T.$$

设所选的等间隔采样时间 T_s 满足采样定理. N 次采样下, 得到 N 组数据: $\{u(kT_s)\}$ 、 $\{y(kT_s)\}$ 、 $k=0, 1, \dots, N-1$ 对该两序列进行离散付里叶变换, 得

$$u^*(jr\omega_s) = \sum_{k=0}^{N-1} u(kT_s) e^{-j \frac{2\pi}{N} kr},$$

$$y^*(jr\omega_s) = \sum_{k=0}^{N-1} y(kT_s) e^{-j \frac{2\pi}{N} kr} \quad r=0, 1, \dots, N-1,$$

其中 ω_s 为采样频率间隔, $\omega_s = \frac{2\pi}{NT_s}$.

于是, 与原系统 S 相应的数据采样系统的离散频率特性为

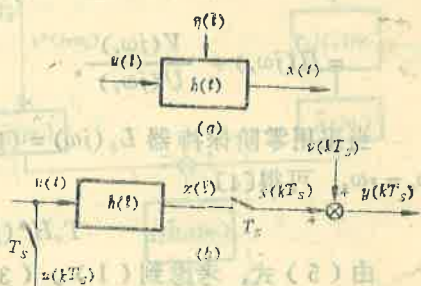


图 1

$$H^*(j\omega_s) = \frac{y^*(j\omega_s)}{u^*(j\omega_s)} \quad (3)$$

由仿真定理[4], 当 T_s 足够小, 数据采样系统的频谱特性 $H^*(j\omega_s)$ 是保持器特性 $L(j\omega)$ 和原系统特性 $\tilde{H}(j\omega)$ 相串联下的组合特性 (见图 2). 保持器的特性需根据 $u(t)$ 的形式来选定, 原系统的频率特性为

$$\begin{aligned} \tilde{H}(j\omega_r) &= \frac{Y(j\omega_r)}{U(j\omega_r)} = \frac{X(j\omega_r) + V(j\omega_r)}{U(j\omega_r)} \\ &= H(j\omega_r) + \frac{V(j\omega_r)}{U(j\omega_r)}. \end{aligned} \quad (4)$$

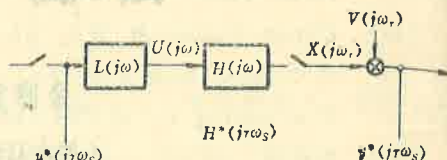


图 2

当采用零阶保持器 $L_0(j\omega) = (1 - e^{-j\omega T_s})/j\omega$, 在 T_s 足够小时, 在各采样频率点 $\omega_r = r\omega_s$, 可得[4]

$$T_s H^*(j\omega_s) = L_0(j\omega_r) \tilde{H}(j\omega_r). \quad (5)$$

由 (5) 式, 考虑到 (1)、(3) 和 (4) 式, 有

$$\frac{T_s}{L_0(j\omega_r)} A(j\omega_r) y^*(j\omega_s) = B(j\omega_r) u^*(j\omega_s) + \frac{u^*(j\omega_s)}{U(j\omega_r)} A(j\omega_r) V(j\omega_r). \quad (6)$$

当满足采样定理, 在奈魁斯特频率范围内, 离散信号频谱 $u^*(j\omega_s)$ 与连续信号频谱 $U(j\omega_r)$ 在各采样频率点 $r\omega_s$ ($r = 0, 1, \dots, N-1$) 处的值是相等的. 即

$$U(j\omega_r) = u^*(j\omega_s) \quad r = 0, 1, \dots, N-1.$$

令

$$e(j\omega_r) = A(j\omega_r) V(j\omega_r),$$

$e(j\omega_r)$ 代表了系统的方程误差. 一般情况下, 它所反映的是有色噪声序列 $\{e(k)\}$ 的特性. 根据表示性定理, 当 $W(j\omega_r)$ 代表白噪声 $w(k)$ 在各采样频率处的频谱, $e(j\omega_r)$ 代表有色噪声 $e(k)$ 的频谱, 则在各采样频率处, $e(k)$ 的成形滤波器的频谱特性为

$$H_f(j\omega_r) = e(j\omega_r) / W(j\omega_r).$$

当序列 $\{e(k)\}$ 用 AR 模型描述时,

$$H_f(j\omega_r) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^p d_i(j\omega_r)^p}.$$

下面用 θ_f 表示噪声模型的参数 d_i , $i = 1, \dots, p$,

$$\theta_f = [d_1, d_2, \dots, d_p]^T.$$

设 $\hat{B}(j\omega_r) / \hat{A}(j\omega_r)$ 为系统 S 的估计特性, $\hat{H}_f(j\omega_r)$ 为 $e(k)$ 为成形滤波器的频谱的估计特性, 在频域内, 将得到广义残差 $\xi(j\omega_r)$

$$\xi(j\omega_r) = \frac{T_s \hat{A}(j\omega_r)}{L_0(j\omega_r) \hat{H}_f(j\omega_r)} y^*(j\omega_s) - \frac{\hat{B}(j\omega_r)}{\hat{H}_f(j\omega_r)} u^*(j\omega_s),$$

$$r = 0, 1, \dots, N-1.$$

相应的广义模型如图 3 所示。

为寻求参数的最优估值，笔者选用残差平方和准则 $J(\hat{\theta}_s, \hat{\theta}_f)$ ，

$$\begin{aligned} J(\hat{\theta}_s, \hat{\theta}_f) &= \frac{1}{2N} \sum_{r=0}^{N-1} \xi^2(j\omega_r) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{r=0}^{N-1} \left[\frac{T_s \hat{A}(j\omega_r)}{L_0(j\omega_r) \hat{H}_f(j\omega_r)} y^*(jr\omega_s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hat{B}(j\omega_r)}{\hat{H}_f(j\omega_r)} u^*(jr\omega_s) \right]^2. \end{aligned} \quad (7)$$

上列准则函数，不仅含有系统模型参数 θ_s ，而且含有未知的噪声模型的参数 θ_f 。按(7)式直接寻求参数 θ_s 的估值是不容易的。为此，将(7)式分解为二个有联系的、但是可以分别处理的准则函数。即，假定 $\hat{\theta}_f$ 已知，先通过使 $J_s(\hat{\theta}_s)$ 最小来估计 $\hat{\theta}_s$ ，

$$J_s(\hat{\theta}_s) = \frac{1}{2N} \sum_{r=0}^{N-1} \left[\frac{T_s}{L_0(j\omega_r)} \hat{A}(j\omega_r) y_s^*(jr\omega_s) - \hat{B}(j\omega_r) u_s^*(jr\omega_s) \right]^2, \quad (8)$$

其中

$$y_s^*(jr\omega_s) = \hat{H}_f^{-1}(j\omega_r) y^*(jr\omega_s),$$

$$u_s^*(jr\omega_s) = \hat{H}_f^{-1}(j\omega_r) u^*(jr\omega_s).$$

当估计出 $\hat{\theta}_s$ ，再使 $J_f(\hat{\theta}_f)$ 最小来估计 $\hat{\theta}_f$ ，

$$\begin{aligned} J_f(\hat{\theta}_f) &= \frac{1}{2N} \sum_{r=0}^{N-1} \left[\frac{T_s}{L_0(j\omega_r) \hat{H}_f(j\omega_r)} y_f^*(jr\omega_s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\hat{H}_f(j\omega_r)} u_f^*(jr\omega_s) \right]^2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$y_f^*(jr\omega_s) = \hat{A}(j\omega_r) y^*(jr\omega_s),$$

$$u_f^*(jr\omega_s) = \hat{B}(j\omega_r) u^*(jr\omega_s).$$

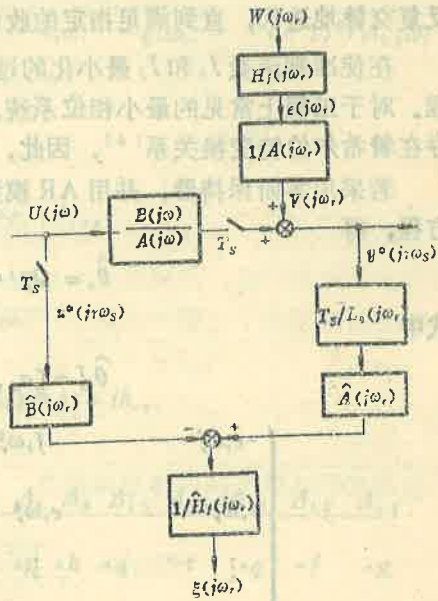


图 3

在选定了采样间隔 T_s 和某种形式的保持器后, 为寻求出 $\hat{\theta}_s$ 和 $\hat{\theta}_f$, 可通过上述松弛法, 反复交替地迭代, 直到满足指定的收敛准则为止。

在使准则函数 J_s 和 J_f 最小化的过程中, 将分别得到求解 $\hat{\theta}_s$ 和 $\hat{\theta}_f$ 的复线性正则方程。对于工程上常见的最小相位系统, 由于其实部和虚部之间并不相互独立, 两者之间存在着希尔伯特变换关系^[4], 因此, 我们可以只取其实部或只取其虚部。

若采用零阶保持器, 并用 AR 模型描述有色噪声序列, 则根据关于 $\hat{\theta}_s$ 的线性正则方程, 得

$$\hat{\theta}_s = \Omega_s^{-1} \varphi_s, \quad (10)$$

式中

$$\hat{\theta}_s^T = [a_1, a_2, \dots, a_n, : b_0, b_1, \dots, b_{n-1}],$$

$$\Omega_s = \sum_{r=0}^{N-1} \begin{bmatrix} -e_r \omega_r^2 & f_r \omega_r^3 & e_r \omega_r^4 \cdots (-1)^{s_1} \Delta_1 \omega_r^{n+1} \\ f_r \omega_r^3 & e_r \omega_r^4 & -f_r \omega_r^5 \cdots (-1)^{s_1} \Delta_2 \omega_r^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{s_1} \Delta_1 \omega_r^{n+1} - (-1)^{s_1} \Delta_2 \omega_r^{n+2} - (-1)^{s_1} \Delta_1 \omega_r^{n+3} - (-1)^{s_1} \Delta_3 \omega_r^{2n} \\ \dots \\ h_r \omega_r & g_r \omega_r^2 & -h_r \omega_r^3 \cdots (-1)^{s_1} \Delta_7 \omega_r^n \\ g_r \omega_r^2 & -h_r \omega_r^3 & -g_r \omega_r^4 \cdots (-1)^{s_1} \Delta_8 \omega_r^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{s_1} \Delta_7 \omega_r^n - (-1)^{s_1} \Delta_8 \omega_r^{n+1} - (-1)^{s_1} \Delta_7 \omega_r^{n+2} - (-1)^{s_1+s_2} \Delta_9 \omega_r^{2n-1} \\ \dots \\ h_r \omega_r & g_r \omega_r^2 & -h_r \omega_r^3 \cdots (-1)^{s_2} \Delta_4 \omega_r^n \\ g_r \omega_r^2 & -h_r \omega_r^3 & -g_r \omega_r^4 \cdots (-1)^{s_2} \Delta_5 \omega_r^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{s_2} \Delta_4 \omega_r^n - (-1)^{s_2} \Delta_5 \omega_r^{n+1} - (-1)^{s_2} \Delta_4 \omega_r^{n+2} \cdots (-1)^{s_1+s_2} \Delta_9 \omega_r^{2n+1} \\ \dots \\ q_r & -t_r \omega_r & -q_r \omega_r^2 \cdots (-1)^{s_2} \Delta_{10} \omega_r^{n-1} \\ -t_r \omega_r & -q_r \omega_r^2 & +t_r \omega_r^3 \cdots (-1)^{s_2} \Delta_{11} \omega_r^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{s_2} \Delta_{10} \omega_r^{n-1} - (-1)^{s_2} \Delta_{11} \omega_r^n - (-1)^{s_2} \Delta_{10} \omega_r^{n+1} - (-1)^{2s_2} \Delta_{12} \omega_r^{2n-2} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_r^T = \sum_{r=0}^{N-1} [f_r \omega_r \quad e_r \omega_r^2 \cdots - (-1)^{s_1} \Delta_{1,3} \omega_r^n : g_r \quad -h_r \omega_r \quad -g_r \omega_r^2 \cdots - (-1)^{s_2} \Delta_{1,4} \omega_r^{n-1}],$$

其中

$$\left[\frac{T_s}{L_0(j\omega_r)} y_s^*(j\omega_s) \right]^2 \triangleq e_r + j f_r,$$

$$[u_s^*(j\omega_s)]^2 \triangleq q_r + j t_r,$$

$$\frac{T_s}{L_0(j\omega_r)} y_s^*(j\omega_r) u_s^*(j\omega_s) \triangleq g_r + j h_r,$$

n	s_1	s_2	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}	Δ_{11}	Δ_{12}	Δ_{13}	Δ_{14}
奇数	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$-e$	$-f$	$-e$	$+h$	$-g$	$+h$	$+h$	$+g$	$+h$	$+q$	$-t$	$+q$	$-f$	$-g$
偶数	$\frac{n}{2}$	$\frac{n-2}{2}$	$-f$	$+e$	$+e$	$+g$	$+h$	$+h$	$-g$	$+h$	$+h$	$-t$	$-q$	$-q$	$+e$	$+h$

根据关于 θ_f 的线性正规方程, 得

$$\hat{\theta}_f = \Omega_f^{-1} \varphi_f, \quad (11)$$

式中

$$\Omega_f = \sum_{r=0}^{N-1} \begin{pmatrix} -l_r \omega_r^2 & m_r \omega_r^3 & l_r \omega_r^4 \cdots (-1)^{s_3} \Delta_{1,5} \omega_r^{p+1} \\ m_r \omega_r^3 & l_r \omega_r^4 & -m_r \omega_r^5 \cdots - (-1)^{s_3} \Delta_{1,6} \omega_r^{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{s_3} \Delta_{1,5} \omega_r^{p+1} - (-1)^{s_3} \Delta_{1,6} \omega_r^{p+2} - (-1)^{s_3} \Delta_{1,5} \omega_r^{p+3} \cdots (-1)^p l_r \omega_r^{2,p} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_f^T = \sum_{r=0}^{N-1} [m_r \omega_r \quad l_r \omega_r^2 \quad -m_r \omega_r^3 \cdots - (-1)^{s_3} \Delta_{1,6} \omega_r^p],$$

其中

$$\left[\frac{T_s}{L_0(j\omega_r)} y_f^*(j\omega_s) - u_f^*(j\omega_s) \right]^2 \triangleq l_r + j m_r,$$

n	s	$\Delta_{1,5}$	$\Delta_{1,6}$
奇数	$\frac{p-1}{2}$	$-l_r$	$-m_r$
偶数	$\frac{p}{2}$	$+m_r$	$+l_r$

当选定保持器，并设定噪声模型的阶数 p （一般可令 $p=2$ 或 3 ），就能启动上述迭代程序。开始迭代时，不妨先令 $d_i=0$ 。

本文附录证明了上述辨识算法所得到的连续系统模型参数的估计量是一致估计量。

三、仿 真 结 果

设待辨识连续系统的传递函数为

$$H(s) = \frac{0.23s + 0.16}{s^2 + 0.247s + 0.014}.$$

仿真实验条件：1. 输入信号，例 1 是长度为 (2^0-1) 的 M 序列；例 2 是由 M 序列通过线性滤波器产生的任意信号。分别采用零阶保持器 L_0 ，一阶保持器 L_1 和三角保持器 L_3 。2. 采样时间间隔 $T_s=0.2$ 秒。3. 输出端的有色噪声由蒙特卡洛法产生，噪声模型设定为二阶的 AR 模型。信噪比 S/N 规定为不同的分贝值。

数字仿真结果如下：

例 1

系 统 参 数 真 值		a_1	a_2	b_0	b_1		
		0.247	0.014	0.16	0.23		
噪声条件	迭代次数	系 统 参 数 估 值				噪声模型参数估值	
		$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$	$\hat{d}_1$	$\hat{d}_2$
$\mu=0, \sigma^2=0$ $S/N=3.2\text{db}$	0	0.247	0.014	0.16	0.23	0	0
	0	0.275	0.015	0.179	0.175	0	0
	1	0.247	0.014	0.160	0.228	0.024	15.76
	2	0.246	0.014	0.159	0.229	-0.093	16.33
$\mu=0.02$ $\sigma^2=1.0$ $S/N=0\text{ db}$	3	0.246	0.014	0.159	0.230	-0.136	16.38
	0	0.324	0.017	0.210	0.077	0	0
	1	0.236	0.012	0.154	0.233	0.022	15.76
	2	0.231	0.012	0.151	0.242	-0.105	16.37
	3	0.231	0.012	0.151	0.242	-0.157	16.44

例 2

系 统 参 数 真 值		a_1	a_2	b_0	b_1
		0.247	0.014	0.16	0.23
噪 声 条 件	所 用 保 持 器	系 统 参 数 估 值			
		$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$
$\mu = 0$ $\sigma^2 = 0$	L_0	0.263	0.016	0.17	0.279
	L_1	0.235	0.016	0.15	0.267
	L_3	0.248	0.015	0.16	0.234
$\mu = 0.006$ $\sigma^2 = 0.16$ $S/N = 3.4 \text{ db}$	L_0	0.241	0.015	0.154	0.287
	L_1	0.247	0.015	0.157	0.264
	L_3	0.260	0.016	0.167	0.230

四、结 论

对于随机干扰下的线性时不变连续系统, 本文所提出的根据系统的输入输出时域采样数据直接辨识该系统连续模型参数的算法是有效的。只要经过次数不多的迭代, 本算法就能使参数估值逼近于其真值, 估计精度也是令人满意的。利用各种快速付里叶变换算法, 本算法的辨识时间可大为缩短。理论分析表明, 所得到的参数估计量是一致的。

参 考 文 献

- [1] Levy, E. C., Complex Curve Fitting, IRE Trans., AC—4, (1959), 37—43.
- [2] Soathanan, C. K. and Kerner, J., Transfer Function Synthesis as a Ratio of Two Complex Polynomials, IEEE Trans. on Aut. Control, AC—8, (1963), 56—58.
- [3] Lawrence, P. J. and Rogers, G. J., Sequential Transfer Function from Measured Data. Proc. IEEE, 1 (1979), 104—106.
- [4] Papoulis A., SIGNAL ANALYSIS, New York, (1977).
- [5] Ljung, L., Convergence Analysis of Parametric Identification Methods, IEEE Trans. on Aut. Control, AC—23, 5, (1978), 770—783.

附录 参数估计量的一致性

在模型集合 m 的范围内, 设待辨识的系统 S 可以确切地用具有阶次 n 和参数向量 $\theta_0^T = [a_1^T : b_1^T]$ $i=1, \dots, n, j=0, \dots, n-1$ 的模型来描述, $\theta_0 \in H$. 当采样次数为 N ,

使准则函数 $J_s^N(\theta_s)$ 为最小的系统模型参数记为 $\hat{a}_i^N$ 和 $\hat{b}_j^N$, 即

$$\hat{a}_i^N = \arg\{\min J_s^N(\theta_s)\}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad N=1, 2, 3, \dots$$

$$\hat{b}_j^N = \arg\{\min J_s^N(\theta_s)\}, \quad j=0, 1, \dots, n-1 \quad N=1, 2, 3, \dots$$

假定 $\hat{a}_i^N \in H$, $\hat{b}_j^N \in H$, 它们是存在的但不一定唯一. 倘若由模型集合 m 所决定的参数 $\hat{a}_i^N$ 、 $\hat{b}_j^N$ 满足下列最优化关系:

$$\hat{a}_i^N \in H_1, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad H_1 \in H,$$

$$\hat{b}_j^N \in H_2, \quad j=0, 1, \dots, n-1, \quad H_2 \in H.$$

而

$$H_1 = \left\{ \hat{a}_i^N : \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}_i^N = -c \frac{\partial}{\partial \hat{a}_i} J_s^N(\theta_s), \quad \left. \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial t} \right|_{t=\infty} = 0, \quad c > 0 \right\},$$

$$H_2 = \left\{ \hat{b}_j^N : \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}_j^N = -c \frac{\partial}{\partial \hat{b}_j} J_s^N(\theta_s), \quad \left. \frac{\partial \hat{b}_j}{\partial t} \right|_{t=\infty} = 0, \quad c > 0 \right\},$$

则由 (8) 式所决定的模型参数估值 $\hat{a}_i$ 、 $\hat{b}_j$ 是系统参数 a_i 、 b_j 的一致估计, 即对于任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|\hat{a}_i^N - a_i| > \epsilon, \hat{a}_i^N \in H_1] = 0, \quad (A1)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|\hat{b}_j^N - b_j| > \epsilon, \hat{b}_j^N \in H_2] = 0. \quad (A2)$$

证 由 (8) 式, 有

$$\xi_s(j\omega_r) = \frac{T_s}{L_0(j\omega_r)} \hat{A}(j\omega_r) y_s^*(j\omega_r) - \hat{B}(j\omega_r) u_s^*(j\omega_r),$$

由(6)式可得

$$\frac{T_s}{L_0(j\omega_r)} A(j\omega_r) y_s^*(j\omega_s) - B(j\omega_r) u_s^*(j\omega_s) - W(j\omega_r) = 0.$$

相减, 得

$$\xi_s(j\omega_r) = \frac{T_s y_s^*(j\omega_s)}{L_0(j\omega_r)} [\hat{A}(j\omega_r) - A(j\omega_r)] - u_s^*(j\omega_s) [\hat{B}(j\omega_r) - B(j\omega_r)] + W(j\omega_r).$$

根据文献[5],

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_s^N &= E[\xi_s(j\omega_r)] \\ &= \frac{T_s y_s^*(j\omega_s)}{L_0(j\omega_r)} [\hat{A}(j\omega_r) - A(j\omega_r)] - u_s^*(j\omega_s) [\hat{B}(j\omega_r) - B(j\omega_r)] \\ &= \frac{T_s y_s^*(j\omega_s)}{L_0(j\omega_r)} \left[\sum_{i=1}^n (\hat{a}_i - a_i) (j\omega_r)^i \right] \\ &\quad - u_s^*(j\omega_s) \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\hat{b}_i - b_i) (j\omega_r)^i \right]. \end{aligned}$$

定义系统的一个李雅普诺夫函数:

$$V^N(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i^N - a_i)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{b}_i^N - b_i), \quad N=1, 2, 3, \dots$$

对时间 t 求 V^N 的全导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V^N(\hat{a}, \hat{b}) &= \frac{\partial}{\partial \hat{a}^N} V^N(\hat{a}, \hat{b}) \frac{d}{dt} \hat{a}_i^N + \frac{\partial}{\partial \hat{b}^N} V^N(\hat{a}, \hat{b}) \frac{d}{dt} \hat{b}_i^N \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i^N - a_i) \frac{d}{dt} \hat{a}_i^N + \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{b}_i^N - b_i) \frac{d}{dt} \hat{b}_i^N. \end{aligned}$$

根据所假设的最优化关系,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{a}_i^N &= -c \frac{\partial}{\partial \hat{a}_i} J_s^N(\theta_s), \\ \frac{d}{dt} \hat{b}_i^N &= -c \frac{\partial}{\partial \hat{b}_i} J_s^N(\theta_s). \end{aligned}$$

根据文献[5]命题 3—1, 当 $N \rightarrow \infty$, 应有

$$J^N(\theta_s) \xrightarrow{w \cdot p \cdot 1} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N} \sum_{r=0}^{N-1} [\xi_s(j\omega_r)]^2 \right\}$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{a}_i} J_s^N(\theta_s) &= \frac{\partial}{\partial \hat{a}_i} \{E[\xi_s(j\omega_r)]^2\} \\ &= 2E[\xi_s(j\omega_r)] \frac{T_s y_s^*(j\omega_s)}{L_0(j\omega_r)} (j\omega_r)^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{b}_i} J_s^N(\theta_s) &= \frac{\partial}{\partial \hat{b}_i} \{E[\xi_s(j\omega_r)]^2\} \\ &= -2E[\xi_s(j\omega_r)] u_s^*(j\omega_s) (j\omega_r)^i. \end{aligned}$$

代入 $\frac{d}{dt} V^N(\hat{a}, \hat{b})$ 的表达式, 得

$$\frac{d}{dt} V^N(\hat{a}, \hat{b}) = -2c[E\xi_s(j\omega_r)]^2.$$

因为 $c > 0$, 所以

$$\frac{d}{dt} V^N(\hat{a}, \hat{b}) \leq 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

当 $N \rightarrow \infty$, 若 $\frac{d}{dt} V^N(\hat{a}, \hat{b}) = 0$, 则有 $E\xi_s(j\omega_r) = 0$. 于是必有 $\hat{a}_i^N = a_i, \hat{b}_i^N = b_i$.

当 $N \rightarrow \infty$, 若 $\frac{d}{dt} V^N(\hat{a}, \hat{b}) < 0$, $V^N(\hat{a}, \hat{b})$ 为一单调下降函数. 由此, 有 $\hat{a}_i^N \rightarrow a_i$,

$$\hat{b}_i^N \rightarrow b_i \quad w \cdot p \cdot 1. \quad N \rightarrow \infty.$$

由以上推导, (A1) 和 (A2) 得证.

A DIRECT PARAMETER ESTIMATION PROCEDURE FOR CONTINUOUS TIME MODELS

Xu Nanrong

Yuan Lijin

(Nanjing Institute of Technology) (Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper, a direct procedure for estimating the parameters of a continuous-time model of a dynamical stochastic system is presented. It is a fast interactive algorithm in frequency domain. The generalized error method in time domain is extended to frequency domain by this method. A set of linear normal equations of the parameters can be obtained by optimizing the cost function, and the difficulties associated with nonlinear parameter estimation can be avoided. It is shown in the appendix that the parameter estimators obtained are consistent. The results of digital simulation of a continuous system demonstrate that the algorithm suggested is effective.