第3卷 第4期
1986年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.3, No.4
Dec., 1986

离散时间的Riccati矩阵代数方程解的一种新算法

姜长生

（南京航空学院）

摘　要

本文提出了离散时间的Riccati矩阵代数方程解的一种新算法.证明了这种算法的基本定理，并给出了这种算法的计算公式和算例.

一、引　言

求解离散时间的Riccati矩阵代数方程，在线性二次型高斯控制系统和线性最优滤波系统的分析、综合、设计中起着关键作用，同时在应用数学的许多领域也有重要应用．若干年来，这一方程的求解受到国内外许多学者的重视，但是和连续情况相比，求解这一方程的办法还不多，还有待于继续研究．文献〔2〕,〔3〕的作者们，在大量文献的基础上，提出了Schur矢量法和广义特征矢量法．文献〔5〕的作者提出过用$2n\times 2n$矩阵的变换矩阵求连续时间Riccati方程解的设想。本文在他们工作的基础上，提出一种新的算法．这种算法从逆对偶矩阵Z出发，根据凯莱－哈密顿定理，利用Z矩阵特征多项式的因式求解．这一算法，对于具有矩阵代数计算的数学库的计算机来说，是非常方便而且简单的．同时，这一算法的数值稳定性也是不言而喻的．

二、基本定理及证明

考虑离散时间的Riccati矩阵代数方程

$$F^TXF-X-F^TXG_1(G_2+G_1^TXG_1)^{-1}G_1^TXF+H=0, \tag{1}$$

式中F、H、$X\in R^{n\times n}$,$G_1\in R^{n\times m}$，$G_2\in R^{m\times m}$，且$G_2=G_2^T>0$，$H=H^T\geq 0$，$m\leq n$．同时假定(F,G_1)是能稳定对，(F,C)是能检测对，并且C为H的满秩因子，即$C^TC=H$，$\mathrm{rank}\,C=\mathrm{rank}\,H$．其次定义

本文于1985年1月19日收到．1985年5月27日收到修改稿．

$$G \triangleq G_1 G_2^{-1} G_1^T. \tag{2}$$

在上述假定之下，方程（1）有唯一对称非负定解。进一步，如果（F,C）完全可观测，则方程（1）有唯一对称正定解。

构造矩阵

$$L=\begin{bmatrix} I & G \\ 0 & F^T \end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix} F & 0 \\ -H & I \end{bmatrix}, \tag{3}$$

如果 F 可逆，则再构造如下逆对偶矩阵 Z（辛阵）

$$Z=L^{-1}M=\begin{bmatrix} F+GF^{-T}H & -GF^{-T} \\ -F^{-T}H & F^{-T} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

定理 1　在上述假设条件下，且 F 可逆，则

（1）矩阵 Z 可以通过相似变换阵 T，使 $T^{-1}ZT$ 化为块三角阵，其中 $T=\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}$，$X$ 为方程（1）的解；

（2）矩阵 Z 的 $2n$ 个特征值有 n 个位于单位圆内，另 n 个位于单位圆外，且互为倒数；

（3）系统的闭环特征值谱为

$$\begin{aligned}\lambda(S)&=\lambda[F-G_1(G_2+G_1^T XG_1)^{-1} G_1^T XF]=\lambda[F-G(X^{-1}+G)^{-1}F]\\ &=\lambda[F-GF^{-T}(X-H)]=\lambda[F^T(I+XG)^{-1}]=\lambda[(I+GX)^{-1}F].\end{aligned} \tag{5}$$

证　设 X 为方程（1）的解，引入如下变换矩阵

$$T=\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix}, \tag{6}$$

对矩阵 Z 作相似变换

$$T^{-1}ZT=\begin{bmatrix} F+GF^{-T}H-GF^{-T}X & -GF^{-T} \\ -XF-XGF^{-T}H-F^{-T}H+XGF^{-T}X+F^{-T}X & XGF^{-T}+F^{-T} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

上式右边的分块矩阵，其左下角块阵为零。因为

$$\begin{aligned}&-XF-XGF^{-T}H-F^{-T}H+XGF^{-T}X+F^{-T}X\\ &=-F^{-T}[F^TXF-X-F^TX(GF^{-T}X-GF^{-T}H)+H].\end{aligned}$$

上式中括号内的表达式就是方程（1）。这是因为可以证明

$$GF^{-T}X-GF^{-T}H=G_1(G_2+G_1^TXG_1)^{-1} G_1^TXF \tag{8}$$

成立。现证式（8）成立，由式（8）的左边，并考虑到方程（1），则有

$$GF^{-T}X-GF^{-T}H=G_1G_2^{-1} G_1^TF^{-T}(X-H)$$

$$= G_1 G_2^{-1}\ G_1^T F^{-T} \cdot F^T X[F - G_1\ (G_2 + G_1^T\ X G_1)^{-1} G_1^T X F]$$

$$= G_1 [\ G_2^{-1}\ G_1^T\ X F - G_2^{-1}\ G_1^T\ X G_1 (G_2 + G_1^T\ X G_1)^{-1} G_1^T X F]$$

$$= G_1 [G_2^{-1} (G_2 + G_1^T\ X G_1) - G_2^{-1}\ G_1^T X G_1] (G_2 + G_1^T X G_1)^{-1}\ G_1^T X F$$

$$= G_1\ (\ G_2 + G_1^T X G_1)^{-1}\ G_1^T X F. \tag{9}$$

可见式（8）的左右两边相等．由此，式（7）可以写成

$$T^{-1} Z T = \begin{bmatrix} F - G F^{-T} (X - H) & -G F^{-T} \\ 0 & (XG + I) F^{-T} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

由于逆对偶矩阵 Z 是可逆的，因此同样有

$$T^{-1} Z^{-1} T = \begin{bmatrix} F^{-1} (I + G X) & F^{-1} G \\ 0 & F^T - (X - H) F^{-1} G \end{bmatrix}. \tag{11}$$

由式（10）和（11）有

$$F - G F^{-T} (X - H) = [F^{-1} (I + G X)]^{-1} = (I + G X)^{-1} F, \tag{12}$$

$$F^T - (X - H) F^{-1} G = [(XG + I) F^{-T}]^{-1} = F^T (XG + I)^{-1}. \tag{13}$$

上两式表明，矩阵

$$F - G F^{-T} (X - H) \text{ 和 } [(XG + I) F^{-T}]^{-1} \tag{14}$$

具有相同的特征值谱．也就是说，如果 λ 是矩阵 $[F - GF^{-T}(X - H)]$ 的特征值，也即 λ 是矩阵 Z 的特征值，那么 λ^{-1} 就是矩阵 $(\ XG + I\ ) F^{-T}$ 的特征值，也即 λ^{-1} 也是矩阵 Z 的特征值．也即 λ_i，$\lambda_i^{-1} (i = 1, \cdots, n)$ 均为矩阵 Z 的特征值．由式（9）和式（10）有

$$\lambda [F - G F^{-T} (X - H)] = \lambda [F - G_1\ (G_2 + G_1^T X G_1\ )^{-1}\ G_1^T X F] = \lambda (F - G_1 K), \tag{15}$$

式中 $K = (\ G_2 + G_1^T X G_1)^{-1}\ G_1^T X F$ 正是离散时间系统在二次性能指标取极小下的最优稳态反馈阵，众所周知，$(\ F, G_1\ )$ 能稳时有

$$|\lambda_i [F - G_1 K]| < 1, \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{16}$$

由式（14）可知

$$|\lambda_i [(XG + I) F^{-T}]| > 1, \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{17}$$

且有 $\lambda_i (F - G_1 K) = \lambda_i^{-1} (X G F^{-T} + F^{-T})$，$(i = 1, \cdots, n)$．这表明，$\lambda_i$，$\lambda_i^{-1}$ 分别是矩阵 Z 在单位圆内和单位圆外的特征值，且互为倒数．至此，定理的（1）、（2）得证．

最后，由式（12）、（13）、（15）不难看出，定理所指出的系统特征值谱是正确的．　　证毕．

定理 2　在与定理 1 相同的假设下，若矩阵 Z 可以通过非奇异相似变换分解成

$$Z=\begin{bmatrix} F+GF^{-T}H & -GF^{-T} \\ -F^{-T}H & F^{-T} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}^{-1}, \tag{18}$$

式中 J 为 Z 在单位圆内的特征值 λ 构成的 Jordan 形矩阵，J^{-1}为 Z 在单位圆外的特征值 λ^{-1} 构成的 Jordan 形矩阵，$W=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$为相应的非奇异变换阵，则方程（1）的唯一对称非负定解可以表示成

$$X=W_{21}W_{11}^{-1}. \tag{19}$$

且当 (F,C) 完全可观测时，有$X>0$。

本定理的证明见文献〔6〕或〔7〕。根据这个定理，方程（1）的解可以通过求矩阵 Z 的特征向量来获得。

三、本算法的定理、计算公式和算例

定理 3　在与定理 1 相同的假设下，方程（1）的解 X 可按如下关系式来确定

$$\Delta(Z)\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}=0 \qquad 或 \quad [-X \quad I]\widetilde{\Delta}(Z)=0, \tag{20}$$

其中 Z 为式（4）所示的矩阵，相应于矩阵多项式 $\Delta(Z)$ 和$\widetilde{\Delta}(Z)$的纯量多项式 $\Delta(\lambda)$ 和 $\widetilde{\Delta}(\lambda^{-1})$满足

$$\det(\lambda I-Z)=\Delta(\lambda)\widetilde{\Delta}(\lambda^{-1}), \tag{21}$$

式中 $\Delta(\lambda)$，$\widetilde{\Delta}(\lambda^{-1})$是幂次均为 n 次的多项式。$\Delta(\lambda)$零点的模小于 1，$\widetilde{\Delta}(\lambda^{-1})$零点的模大于 1。这里还假定，$\Delta(Z)=\begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix}$和$\widetilde{\Delta}(Z)=\begin{bmatrix} \widetilde{Z}_{11} & \widetilde{Z}_{12} \\ \widetilde{Z}_{21} & \widetilde{Z}_{22} \end{bmatrix}$ 的 $n\times n$ 分块 $\hat{Z}_{12}$ 和$\widetilde{Z}_{12}$均可逆。

证　　根据定理 1，考虑到式（10）、（16）和（17），则有

$$\det(\lambda I-Z)=\det\{\lambda I-[F-GF^{-T}(X-H)]\}\det[\lambda I-(XG+I)F^{-T}]$$
$$=\Delta(\lambda)\widetilde{\Delta}(\lambda^{-1}), \tag{22}$$

式中$\Delta(\lambda)$零点的模小于 1，而 $\widetilde{\Delta}(\lambda^{-1})$零点的模大于1。设纯量多项式 $\Delta(\lambda)$为

$$\Delta(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n. \tag{23}$$

将矩阵 Z 代入式（23）得

$$\Delta(Z)=\begin{bmatrix}\hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12}\\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22}\end{bmatrix}=Z^n+a_1Z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}Z+a_nI. \tag{24}$$

用式(6)的变换阵T和T^{-1}对上式作变换

$$T^{-1}\Delta(Z)T=\begin{bmatrix}\hat{Z}_{11}+\hat{Z}_{12}X & \hat{Z}_{12}\\ -X\hat{Z}_{11}+\hat{Z}_{21}-X\hat{Z}_{12}X+\hat{Z}_{22}X & -X\hat{Z}_{12}+\hat{Z}_{22}\end{bmatrix}. \tag{25}$$

由式(10)有

$$\Delta(T^{-1}ZT)=\begin{bmatrix}\Delta[F-GF^{-T}(X-H)] & \Sigma\\ 0 & \Delta[(XG+I)F^{-T}]\end{bmatrix}, \tag{26}$$

式中Σ为$n\times n$矩阵。因为式(25)和(26)是完全相等的两个分块矩阵，所以由分块矩阵相等的法则得

$$\hat{Z}_{11}+\hat{Z}_{12}X=\Delta[F-GF^{-T}(X-H)]. \tag{27}$$

由凯莱-哈密顿定理知

$$\Delta[F-GF^{-T}(X-H)]=0.$$

再由假定$\hat{Z}_{12}$的逆存在，则由式(27)得

$$X=-\hat{Z}_{12}^{-1}\hat{Z}_{11}. \tag{28}$$

同样由

$$-X\tilde{Z}_{12}+\tilde{Z}_{22}=\tilde{\Delta}[(XG+I)F^{-T}]=0, \tag{29}$$

可得

$$X=\tilde{Z}_{22}\tilde{Z}_{12}^{-1}. \tag{30}$$

式(28)和(30)分别与定理所指出的式(20)的两式是等效的。 证毕。

定理3的证明过程实际上同时给出了方程(1)的解的计算公式和计算步骤。据此，便不难得方程(1)的解。上述算法也适用于连续系统情况。

算 例 已知系统的参数如下：

$$F=\begin{pmatrix}2.1 & -0.4 & -2.2 & 1.1\\ -5.7 & 2 & 6.6 & -4.5\\ -6.1 & 1.6 & 7.8 & -4.7\\ -13.8 & 3.6 & 16.8 & -10\end{pmatrix},\quad G_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad G_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

不难验证系统的参数满足：F可逆，$(F,\ G_1)$能稳，$G_2=G_2^T>0$，$H=H^T\geq 0$，$m=3$

$<n=4$，且存在 C 阵

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

使 $C^TC=H$，rank $C=$ rank H，和 (F,C) 完全可观测。如此，经计算机计算得方程（1）的解 X 为

$$X=\begin{pmatrix} 208.0260440 & -58.3511217 & -248.5322302 & 152.7698700 \\ -58.3511217 & 18.5019734 & 71.0629253 & -42.1337261 \\ -248.5322302 & 71.0629253 & 299.4252577 & -183.4603896 \\ 152.7698700 & -42.1337261 & -183.4603896 & 113.8656139 \end{pmatrix}.$$

经验算所得结果十分准确。不同的计算数例表明，上面所提出的新算法是十分有效的，它为解决这类问题又提供了一条新途径。

致谢　黄琳教授对本文初稿提出了宝贵意见，笔者深致谢意。

参 考 文 献

〔1〕 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，（1984）。

〔2〕 Laub, A. J., A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations, IEEE, AC-**24**, 6, (1979), 913-921.

〔3〕 Pappas, T., Laub, A. J. and Sandell, N.R.,On the Numerical Solution of the Discrete-time Algebraic Riccati Equation, IEEE, AC-**25**, 4, (1980), 631-641.

〔4〕 Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Optimal Filtering Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, (1979).

〔5〕 Anderson, B. D. O., The Solution of Quadratic Matrix Equations, Electronics Letters, 2, (1966),371-372.

〔6〕 姜长生，离散时间的 Riccati 矩阵代数方程解的一种新算法，第五届全国控制理论及其应用学术交流会论文集，下册，（1985），551-554.

〔7〕 Икрамов, Х. Д., Численное Решенме Матричных Уравнений, Москва, Наука, (1984), 148-160.

A NEW ALGORITHM FOR SOLVING THE DISCRETE-TIME RICCATI MATRIX ALGEBRAIC EQUATION

Jiang Changsheng

(Nanjing Aeronautical Institute)

Abstract

In this paper, a new algorithm for solving the discrete-time Riccati matrix algebraic equation is presented. The basic theorems of this algorithm are demonstrated, and the solving formulas and numerical example of this algorithm are given.