第3卷 第4期　　控 制 理 论 与 应 用　　Vol. 3, No. 4
1986年12月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1986

带有色观测噪声的多变量自校正滤波器和平滑器

邓自立

（黑龙江省应用数学研究所）

摘　要

应用时间序列分析方法和射影理论，基于观测过程的ARMAX新息模型，对于带有色观测噪声的多变量系统，本文提出了两类自校正滤波器和平滑器，它们分别可应用于语音信号辨识[1]和动态船舶定位[2]。

一、引　　言

在噪声环境中的语音信号辨识问题被Tomcik和Melsa[1]处理为带有色观测噪声系统的自适应滤波问题，他们提出了增广状态的Kalman滤波方案，其中假定信号模型是未知的，但有色观测噪声模型是已知的。另一方面，动态船舶定位系统新近被Fung和Grimble[2]处理为带有色观测噪声系统的自校正Kalman滤波问题，他们提出了一种自校正Kalman滤波器，其中假定信号模型是已知的，但有色噪声模型是未知的。根据上述应用背景，本文提出了两类新的自校正滤波器和平滑器。第一类适用于信号模型未知，有色观测噪声模型已知的多变量系统。第二类适用于信号模型已知，有色观测噪声模型未知的多变量系统。

二、第一类自校正滤波器和平滑器

设信号$\mathrm{x}(t)$服从多变量ARMAX模型

$$A(q^{-1})\mathrm{x}(t)=B(q^{-1})\mathrm{u}(t)+C(q^{-1})\mathrm{w}(t), \tag{2.1}$$

观测模型为

$$y(t)=\mathrm{x}(t)+\eta(t), \tag{2.2}$$

有色观测噪声$\eta(t)$服从多变量ARMA模型

本文于1984年3月12日收到。1986年7月3日收到修改稿。

$$R(q^{-1})\eta(t)=S(q^{-1})\xi(t), \tag{2.3}$$

其中$\mathrm{x}(t)\in R^n$，$\mathrm{u}(t)\in R^m$，$\mathrm{w}(t)\in R^p$. $A(q^{-1})$，…，$S(q^{-1})$是单位滞后算子q^{-1}的多项式矩阵，系数阵分别为A_i，…，S_i，且$A_0=R_0=S_0=C_0=I$（单位阵）. $\mathrm{w}(t)$和$\xi(t)$是独立的零均值、协方差分别为Q_W和Q_ξ的白噪声. $\mathrm{u}(t)$是已知的确定性输入. t是离散时间. 设$A(q^{-1})$和$R(q^{-1})$是稳定的，即$\det A(q^{-1})$和$\det R(q^{-1})$的根在单位圆外.

假设信号模型是未知的，即$A(q^{-1})$，$B(q^{-1})$，$C(q^{-1})$和Q_W是未知的，但有色噪声模型是已知的，即$R(q^{-1})$，$S(q^{-1})$和Q_ξ是已知的. 问题是基于到时刻$t+k$的观测$\{\mathrm{y}(t+k)$，$\mathrm{y}(t+k-1)$，……$\}$和已知的输入$\{\mathrm{u}(t+k)$，$\mathrm{u}(t+k-1)$，……$\}$求未知信号$\mathrm{x}(t)$的自校正稳态最优平滑器$\hat{\mathrm{x}}(t|t+k)$，k是固定滞后.

由(2.1)～(2.3)式利用文献[3]的方法可得观测过程$\mathrm{y}(t)$的ARMAX新息模型为

$$A(q^{-1})\mathrm{z}(t)=B(q^{-1})\mathrm{m}(t)+D(q^{-1})\mathrm{e}(t), \tag{2.4}$$

其中$\mathrm{z}(t)=r(q^{-1})\mathrm{y}(t)$，$\mathrm{m}(t)=r(q^{-1})\mathrm{u}(t)$；$r(q^{-1})=\det R(q^{-1})$，新息$\mathrm{e}(t)$是零均值、协方差为$Q_e$的$n$维白噪声. 多项式矩阵$D(q^{-1})$是稳定的，且记$R^*(q^{-1})=\mathrm{adj}R(q^{-1})$时，我们有$D(q^{-1})\mathrm{e}(t)=A(q^{-1})R^*(q^{-1})S(q^{-1})\xi(t)+C(q^{-1})r(q^{-1})\mathrm{w}(t)$. (2.5)

由射影理论，稳态($t_0=-\infty$)最优平滑器$\hat{\mathrm{x}}(t|t+k)$是$\mathrm{x}(t)$在由新息序列$\{\mathrm{e}(t+k)$，$\mathrm{e}(t+k-1)$，……$\}$和所有常向量所张成的Hilbert空间上的射影. 用类似于文献[3]的方法可得到稳态最优平滑器为

$$\hat{\mathrm{x}}(t|t+k)=\mathrm{y}(t)-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k+j}G_jQ_\xi T^{\tau}_{k+j-i}\ Q_e^{-1}\mathrm{e}(t+k-i), \tag{2.6}$$

其中τ为转置号. G_j是$R^{-1}(q^{-1})S(q^{-1})$展开成q^{-1}的幂级数的系数阵；T_j是$D^{-1}(q^{-1})A(q^{-1})R^*(q^{-1})S(q^{-1})$展开成$q^{-1}$的幂级数的系数阵. 它们都可简单地递推计算[3].

当$k=0$时，稳态最优滤波器为

$$\hat{\mathrm{x}}(t|t)=\mathrm{y}(t)-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}G_iQ_\xi T^{\tau}_{j-i}\ Q_e^{-1}\mathrm{e}(t-i). \tag{2.7}$$

当初始时刻有限时($t_0\neq-\infty$)，基于有限观测历史数据$\{\mathrm{y}(t+k)$，…，$\mathrm{y}(t_0)$；$\mathrm{u}(t+k)$，…，$\mathrm{u}(t_0)\}$可用递推增广最小二乘法[3,4]在线辨识ARMAX新息模型(2.4)式，可得系数阵估值$\hat{A}_i$，$\hat{B}_i$，$\hat{D}_i$和新息估值$\hat{\mathrm{e}}(t+k)$，$\hat{Q}_e$，进而可得估值$\hat{T}_j$. 把它们代入(2.6)和(2.7)式可得自校正平滑器和滤波器. 在应用中(2.6)和(2.7)式的无穷级数可用前有限项和近似代替.

三、第二类自校正滤波器和平滑器

动态船舶定位系统可分为[2]低频运动子系统

$$\begin{cases} x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)+Gw(t), & (3.1)\\ y(t)=Hx(t)+v(t)+\eta(t) & (3.2)\end{cases}$$

和高频干扰子系统

$$R(q^{-1})\eta(t)=S(q^{-1})\xi(t), \tag{3.3}$$

其中$x(t)\in R^n$，$y(t)\in R^m$，$u(t)\in R^r$，$w(t)\in R^p$. $u(t)$是已知的确定性输入. $w(t)$, $v(t)$ $\xi(t)$是零均值、协方差分别为Q_w，Q_v，Q_ξ的独立的白噪声.

同文献[2]，假定矩阵A，B，G，H和Q_w是已知的，但$R(q^{-1})$，$S(q^{-1})$，Q_v和Q_ξ是未知的. 设矩阵A和多项式矩阵$R(q^{-1})$是稳定的. 现在来求稳态最优滤波器和平滑器$\hat{x}(t|t+k)$.

由(3.1)～(3.3)式可得ARMA新息模型为

$$R(q^{-1})z(t)=D(q^{-1})e(t), \tag{3.4}$$

其中新息$e(t)$是零均值、协方差为Q_e的白噪声，多项式矩阵$D(q^{-1})$是稳定的，且

$$z(t)=a(q^{-1})y(t)-HA^*(q^{-1})Bu(t-1), \tag{3.5}$$

$$D(q^{-1})e(t)=R(q^{-1})HA^*(q^{-1})Gw(t-1)+a(q^{-1})R(q^{-1})v(t) + a(q^{-1})S(q^{-1})\xi(t), \tag{3.6}$$

其中$a(q^{-1})=\det(I-q^{-1}A)$；$A^*(q^{-1})=\mathrm{adj}(I-q^{-1}A)$.

由射影理论[3]可得稳态最优预报器为

$$\hat{x}(t|t-1)=A\hat{x}(t-1|t-1)+Bu(t-1), \tag{3.7}$$

稳态最优滤波器为

$$\hat{x}(t|t)=A\hat{x}(t-1|t-1)+Bu(t-1)+K_0e(t), \tag{3.8}$$

其中K_0为稳态滤波增益阵，且

$$K_0=E[x(t)e^\tau(t)]Q_e^{-1}, \tag{3.9}$$

其中E为数学期望号. 由A的稳定性和(3.1)式有展式

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}A^iBu(t-1-i)+\sum_{i=0}^{\infty}A^iGw(t-1-i). \tag{3.10}$$

由$D(q^{-1})$的稳定性和(3.6)式，新息$e(t)$可展成为$w(t-1)$，$v(t)$和$\xi(t)$的滑动和之和，因而

$$E[w(s)e^\tau(t)]=\begin{cases}0, & s\geq t;\\ Q_w\Phi_{t-s-1}^\tau, & s<t.\end{cases} \tag{3.11}$$

其中

$$D^{-1}(q^{-1})R(q^{-1})HA^*(q^{-1})G=\sum_{j=0}^{\infty}\Phi_j q^{-j}, \tag{3.12}$$

系数阵Φ_j可递推计算为[3]

$$\Phi_j=-D_1\Phi_{j-1}-\cdots-D_{n_d}\Phi_{j-n_d}+P_j, \tag{3.13}$$

其中$D(q^{-1})$的系数阵为D_i,阶为n_d; $P(q^{-1})\triangleq R(q^{-1})HA^*(q^{-1})G$的系数阵为$P_j$,阶为$n_p$; $\Phi_0=HG$; $\Phi_j=0$, 对于$j<0$; $P_j=0$, 对于$j>n_p$.

把(3.10)代入(3.9)并利用(3.11)式可得到稳态最优滤波增益阵为

$$K_0=\sum_{i=0}^{\infty}A^iGQ_w\Phi_i^{\tau}Q_e^{-1}. \tag{3.14}$$

类似地，稳态最优平滑器为

$$\hat{x}(t|t+k)=\hat{x}(t|t)+\sum_{j=1}^{k}K_j e(t+j). \tag{3.15}$$

而平滑增益阵为

$$K_j=\sum_{i=0}^{\infty}A^iGQ_w\Phi_{j+i}^{\tau}Q_e^{-1}. \tag{3.16}$$

当初始时刻$t_0\neq-\infty$时，基于ARMA新息模型(3.4)的在线辨识[3,4]，可在线计算估值$\hat{e}(t)$，$\hat{Q}_e$，$\hat{\Phi}_i$，把它代入(3.8)，(3.14)和(3.15)，(3.16)可得自校正Kalman滤波器和平滑器。实用上，在(3.14)和(3.16)式中的无穷级数可用其前有限项和近似代替。

参　考　文　献

〔1〕Tomcik, J. D., Melsa, J. L., Identification of Speech and Speech parameters in a Noisy Environment, Proc. of 1977 Joint Automatic Gontrol Conference, 2, 1405—1410.

〔2〕Fung, P.T.K., Grimble, M.J., Dynamic Ship Positioning Using a Self-Tuning Kalman Filter, IEEE Trans. Autom. Contr.,AC-**28**,3,(1983),339—350.

〔3〕邓自立，多变量ARMAX过程的自校正滤波器和平滑器，自动化学报，**11**，增刊，1，（1985），1—7.

〔4〕邓自立、郭一新，多变量CARMA模型的结构辨识，自动化学报，**12**,1,（1986），18—23.

MULTIVARIATE SELF—TUNING FILTER AND SMOOTHER WITH THE COLOURED OBSERVATION NOISE

Deng Zili

(Heilongjiang Institute of Applied Mathematics)

Abstract

Using the time series analysis method and projection theory, based on ARMAX innovation models of the observation processes, this paper presents two kinds of self-tuning filter and smoother for multivariable systems with the coloured observation noise, they can be applied to the speech signal identification and the dynamic ship positioning, respectively.