第3卷 第4期
1986年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 3, No. 4
Dec., 1986

森林系统树木生长的数学模型及辨识

张 捍 东

（黑龙江大学应用数学研究所）

摘 要

本文根据森林树木生长的特殊规律，建立起森林系统时变参数的数学模型，并对参数估计的递推算法[1]进行了有效的改进．森林生长模型的研究具有一定的实用价值．

一、引 言

生态平衡的核心就是森林．森林生产经营实际上是林产品生产和保护性资源经营的统一体，只有在其稳定的生长过程中，才能向人们提供丰富的物质原料．一般说来，林木的生长决定于树种的生物学特性、立地条件及人为的作用．而且树木或林分的平均材积生长量先随树龄的增长而增长，到达一定时期以后再逐渐下降[2]．

根据林木生长的特有规律，应用现代控制理论分析和解决森林系统的经营管理问题，首先要建立林木生长过程的数学模型．在文献〔4〕中已初步建立起这方面的一个较实用的模型，1981年Suresh P. Sethi引用并推广了这个模型[3]，但模型中的参数仍然是非时变的．我国的地理位置、生态环境与北美的加拿大、美国等地的条件比较接近，故模型基本框架是一致的，关键在于确定其中的参数．因为林木的生长快慢与许多因素有关，它不会是定常不变的，所以在本文中把这个模型中的参数认为是时变的．

二、系统模型的参数估计与多层递阶预报

估计模型参数的方法有很多，但几乎所有可用的方法都是处理线性情形的，且计算量也较大．这里笔者采用的是推广的递推梯度算法[1]，这种算法不但适用于线性情形，也适用于非线性情形，而且能够很好地反映出时变参数的时变特性．在运用这种算法进行参数估计时，为了解决其中时变因子δ_k的选取问题，参考文献〔5〕，得出了逐次选取δ_k的公式和方法．这样得出的参数估值能够使系统的真实输出与模型输出任意地接近．对于模型输出的‘将来’时刻的值，笔者采用多层递阶预报方法[6]进行预报，这种方法避免了一般方法的随预报步长增长预报误差也增大的缺点，是一种很好的多步自适应预报方法．

本文于1985年7月25日收到．1986年5月12日收到修改稿．

三、森林生长的数学模型及辨识

考虑如下的森林树木生长模型：

$$\dot{y}(t) = g(t) f(y(t)) + e(t), \tag{1}$$

其中 $y(t)$ 是 t 时刻树木的材积，$g(t)$ 是生长系数，可取 $g(t) = a(t)t^{-b(t)}$；$f(y(t))$ 是生长函数，可取 $f(y(t)) = y(t)e^{-\alpha(t)y(t)}$，这里 $a(t)$、$b(t)$ 和 $\alpha(t)$ 都是时变参数。$e(t)$ 是非相关随机噪声，它代表一些随机干扰因素和建模误差。为了能够在计算机上实现，应用微分方程的 Euler 数值解法，把模型（1）离散化，近似地有如下离散动态系统数学模型：

$$y(t_k) = y(t_{k-1}) + a(t_k)(t_{k-1})^{-b(t_k)} y(t_{k-1})e^{-\alpha(t_k)y(t_{k-1})} + e(t_k), \tag{1'}$$
$$t_k = t_{k-1} + h.$$

因为用这种方法得出的离散系统与连续系统之间的总体截断误差和积分步长 h 同阶，不妨取 $h = 10^{-3}$。但是本文采用的修改后的估计算法能使系统真实输出与模型输出之间的误差 $\leq 10^{-6}$，故用离散系统（1′）代替连续系统（1）误差 $\leq^{-3}$。

变换模型（1′）的形式，若置 $\theta(k) = (a(k), b(k), \alpha(k))$；$t_k = k$，

并记 $f[\mathbf{Y}_{k-1}, \theta(k), k] = y(k-1) + a(k)(k-1)^{-b(k)} y(k-1)e^{-\alpha(k)y(k-1)}$，则模型（1′）还可写成

$$y(k) = f[\mathbf{Y}_{k-1}, \theta(k), k] + e(k). \tag{1''}$$

利用 $y(k)$ 的观测值，可按下述的推广递推梯度算法算得 $\theta(k)$ 的估值 $\hat{\theta}(k)$：

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{\delta_k \nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[\mathbf{Y}_{k-1}, \hat{\theta}(k-1), k]}{\|\nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[\mathbf{Y}_{k-1}, \hat{\theta}(k-1), k]\|^2} \cdot \{y(k) - f[\mathbf{Y}_{k-1}, \hat{\theta}(k-1), k]\}$$

$$= \hat{\theta}(k-1) + \frac{\delta_k}{C_1^2(k) + C_2^2(k) + C_3^2(k)} \begin{pmatrix} C_1(k) \\ C_2(k) \\ C_3(k) \end{pmatrix}$$

$$\cdot \{y(k) - f[\mathbf{Y}_{k-1}, \hat{\theta}(k-1), k]\}, \tag{2}$$

这里 $C_1(k) \triangleq \dfrac{\partial f}{\partial \hat{a}(k-1)} = (k-1)^{-\hat{b}(k-1)} y(k-1)e^{-\hat{\alpha}(k-1)y(k-1)}$

$$C_2(k) \triangleq \frac{\partial f}{\partial \hat{b}(k-1)} = -\hat{a}(k-1)(k-1)^{-\hat{b}(k-1)} y(k-1)e^{-\hat{\alpha}(k-1)y(k-1)} \ln(k-1)$$

$$= -\hat{a}(k-1)\ln(k-1)C_1(k).$$

$$C_3(k) \triangleq \frac{\partial f}{\partial \hat{\alpha}(k-1)} = -\hat{a}(k-1)(k-1)^{-\hat{b}(k-1)} y^2(k-1) e^{-\hat{\alpha}(k-1)y(k-1)}$$

$$= \hat{a}(k-1)y(k-1)C_1(k).$$

在式(2)中时变因子 δ_k 的选取应尽量使后验残差：$\varepsilon(k,\hat{\theta}(k)) = y(k) - f[\mathbf{Y}_{k-1},\ \hat{\theta}(k),k]$ 尽可能的小。对于线性系统，取 $\delta_k \equiv 1$，就恒有 $\varepsilon(k,\ \hat{\theta}(k)) = 0$。对于非线性系统，我们经过一系列数学推导，得出时变因子 δ_k 的具体选取步骤是：设由公式(2)，用时变因子 δ_{k-1} 已算得 $\hat{\theta}(k-1)$，现需用(2)式算 $\hat{\theta}(k)$。为此首先把时变因子 δ_k 取作 $\delta_k^1 = \delta_{k-1}$，用 δ_k^1 由(2)式算得的 $\hat{\theta}(k)$ 记作 $\hat{\theta}_1(k) = (\hat{a}_1(k),\ \hat{b}_1(k),\ \hat{\alpha}_1(k))$，如果后验残差 $\varepsilon(k,\ \hat{\theta}(k))$ 达到了规定的标准，如 $<10^{-5}$，再继续算 $\hat{\theta}(k+1)$。否则，给因子 δ_k^1 一个扰动 $\Delta\delta$，扰动 $\Delta\delta$ 根据下面一系列公式算得：

$$\Delta\delta = \frac{-\mu_k - S\delta_k + \sqrt{(\mu_k + S\delta_k)^2 - 4S(\mu_k\delta_k - 1)}}{2S},$$

其中 $S = V_a M_1 W - V_b M_1(\overline{a_1}(k)W\ln(k-1) + R\overline{C_1}(k)\ln(k-1))$

$$-V_\alpha M_1(R\overline{C_1}(k)y(k-1) + \overline{a_1}(k)Wy(k-1));$$

$$R = \{(f(\mathbf{Y}_{k-1},\ \hat{\theta}_1(k),\ k) - f(\mathbf{Y}_{k-1},\hat{\theta}(k-1),\ k) - \overline{C_1}(k)(\hat{a}_1(k) - \hat{a}(k-1))$$

$$\cdot[\overline{C_1}(k)(V_b M_1\ln(k-1) + V_\alpha M_1 y(k-1)) + W((\hat{b}_1(k) - \hat{b}(k-1))\ln(k-1)$$

$$+ (\hat{\alpha}_1(k) - \hat{\alpha}(k-1))y(k-1))] + (V_a M_1 C_1^0(k) + V_b M_1 C_2^0(k) + V_\alpha M_1 C_3^0(k)$$

$$+ \overline{C_1}(k)V_\alpha M_1 + W(\hat{a}_1(k) - \hat{a}(k-1))\cdot\overline{C_1}(k)((\hat{b}_1(k) - \hat{b}(k-1))\ln(k-1)$$

$$+ (\hat{\alpha}_1(k) - \hat{\alpha}(k-1))y(k-1))\}/\{\overline{C_1}(k)((\hat{b}_1(k) - \hat{b}(k-1))\ln(k-1)$$

$$+ ((\hat{\alpha}_1(k) - \hat{\alpha}(k-1))y(k-1))\}^2;$$

$$W = -\frac{1}{2}\overline{C_1}(k)M_1(V_b\ln(k-1) + V_\alpha y(k-1));$$

$$M_1 = \frac{\{y(k) - f[\mathbf{Y}_{k-1},\ \hat{\theta}(k-1),k]\}}{\|\nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[\mathbf{Y}_{k-1},\ \hat{\theta}(k-1),k]\|^2};\quad V_a = \nabla_{\hat{a}(k-1)} f[\mathbf{Y}_{k-1},\ \hat{\theta}(k-1),k];$$

$$V_b = \nabla_{\hat{b}(k-1)} f[\mathbf{Y}_{k-1},\ \hat{\theta}(k-1),k];\quad V_\alpha = \nabla_{\hat{\alpha}(k-1)} f[\mathbf{Y}_{k-1},\ \hat{\theta}(k-1),k];$$

$$\overline{C_1}(k) = (k-1)^{-(\hat{b}_1(k) + \hat{b}(k-1))/2} y(k-1) e^{-\{(\hat{\alpha}_1(k) + \hat{\alpha}(k-1))/2\}y(k-1)},$$

$$C_1^0(k)=(k-1)^{-\hat{b}_1(k)}\,y(k-1)e^{-\hat{\alpha}_1(k)y(k-1)};\quad \overline{b_1}(k)=\frac{\hat{b}_1(k)+\hat{b}(k-1)}{2};$$

$$C_2^0(k)=-(\hat{\alpha}_1(k)\ln(k-1))C_1^0(k);\quad \overline{\alpha_1}(k)=\frac{\hat{\alpha}_1(k)+\hat{\alpha}(k-1)}{2};$$

$$C_3^0(k)=-(\hat{a}_1(k)y(k-1))\,C_1^0(k);$$

$$\mu_k=\frac{\nabla_{\hat{\theta}(k-1)}f[\mathbf{Y}_{k-1},\overline{\theta_1(k)},k]\,\Delta_{\hat{\theta}(k-1)}f[\mathbf{Y}_{k-1},\hat{\theta}(k-1),k]}{\|\nabla_{\hat{\theta}(k-1)}f[\mathbf{Y}_{k-1},\hat{\theta}(k-1),k]\|^2};$$

$$\overline{\theta_1(k)}=(\overline{a_1}(k),\overline{b_1}(k),\overline{\alpha_1}(k))^{\top};$$

$$\overline{a_1}(k)=\frac{\overline{C_1}(k)(\hat{\alpha}_1(k)-\hat{a}(k-1))+f[\mathbf{Y}_{k-1},\hat{\theta}(k-1),k]-f[\mathbf{Y}_{k-1},\hat{\theta}_1(k),k]}{\overline{C_1}(k)(\hat{b}_1(k)-\hat{b}(k-1))\ln(k-1)+\overline{C_1}(k)y(k-1)(\hat{\alpha}_1(k)-\hat{\alpha}(k-1))}.$$

把 δ_k 取作 $\delta_k^2=\delta_k^1+\Delta\delta$，用$\delta_k^2$算得的$\hat{\theta}(k)$如果还没有达到标准，则用前述方法再给 δ_k^2一个扰动．依次类推．实际计算表明，通过几次加扰动以后，总能得到这样的$\hat{\theta}(k)$，使后验残差 $\varepsilon(k,\hat{\theta}(k))$达到给定的标准．然后再继续算 $\hat{\theta}(k+1)$，……．以上公式虽然复杂，但借助于计算机，还是比较容易实现的．上述公式的推导原理可参考文献[5]．

利用这样逐次选取时变因子 δ_k 的方法算得的参数估值均使后验残差小于 10^{-6}，见图1所示．

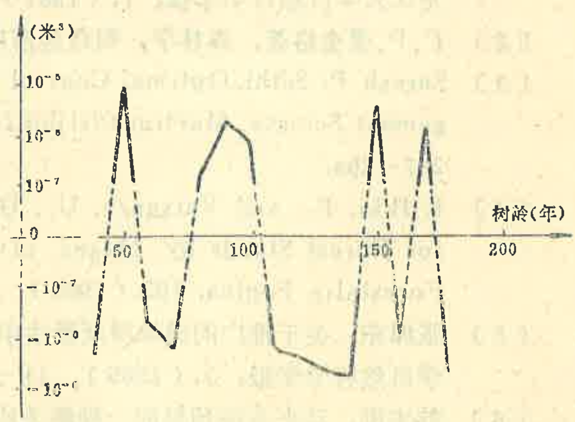

图 1　后验残差

因为森林树木生长模型的观测数据不够多，对于‘将来’时刻系统的输出$y(k)$，笔者采用多层递阶预报方法可得出系统的多步自适应预报．多层递阶预报方法是在参数估计基础上，充分考虑参数变化的时变特性和规律，先对参数建模并预报，进而得出系统输出的预报值，而本文采用修改后的精度较高的算法估计模型参数．多层递阶预报方法得出的预报值和观测值进行比较精度很高，关于预报误差分析及应用结果参见文献[6]、[7]等．图2表示森林树木生长过程中平均生长量$\frac{y(k)}{k}$的变化规律．虚线部分是预

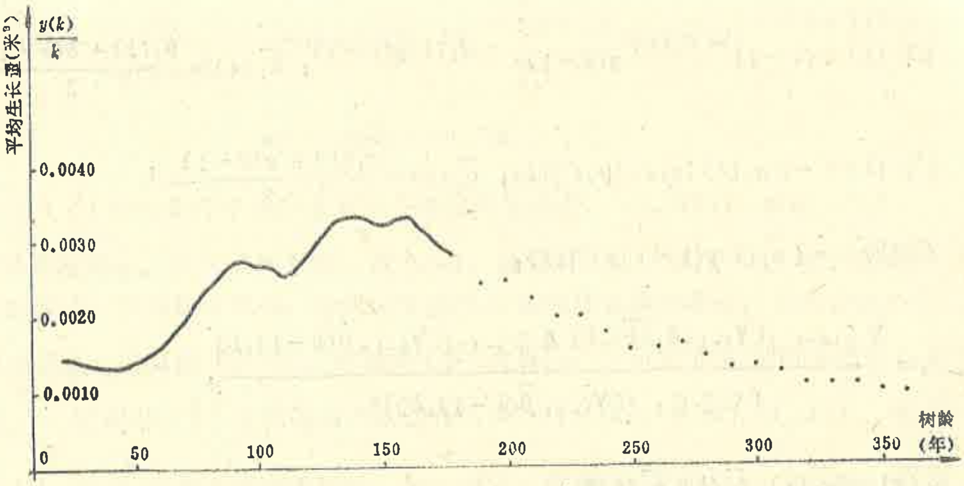

图 2 林木的平均材积生长量. 虚线部分为预报

报值，预报值的下降正符合于林木的平均（材积）生长量先随树龄的增长而增长，到达一定时期后开始下降的生物学规律. 至此已基本完成了建模与辨识工作. 提供有关数据的某林业局的森林生长情况与本模型是吻合的.

致谢 本文是在韩志刚教授的指导和帮助下完成的，在此表示衷心感谢.

参 考 文 献

〔1〕 韩志刚，非线性离散时间非随机系统未知参数估计的一类递推算法，黑龙江大学自然科学学报，1,（1981），7－16.

〔2〕 Г.Р.爱金格著，森林学，财政经济出版社，北京，（1956）.

〔3〕 Suresh P. Sethi, Optimal Control Theory Applications to Management Science, Martinus Nijhoff Pubblishing, Boston, （1981），287－294.

〔4〕 Kilkki, P. and Vaisanen, U., Determination of Optimal Policy for Forest Stands by Means of Dynamic Programining, Acta Forestalia Fenica, 102,（1969），100－112.

〔5〕 张捍东，关于推广的递推梯度算法中时变因子 δ_k 的选取问题，黑龙江大学自然科学学报，3,（1985），11－18.

〔6〕 韩志刚，动态系统预报的一种新方法，自动化学报，**9**，3,（1983），161－168.

〔7〕 韩志刚、汤兵勇、张恩恕，黑龙江省五月降水环流形势的多层递阶长期预报模型，信息与控制，2,（1985），1－5.

ON THE MATHEMATICAL MODEL AND ITS IDENTIFICATION FOR THE GROWTH OF TREES IN A FOREST SYSTEMS

Zhang Handong

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin)

Abstract

In this paper, the mathematical model with time-varying coefficients for the growth of trees in a forest system is given. It is obtained by the special growth law of forest trees, The recursive algorithm for parameter estimation given in [1] was effectively improved in this paper.