第4卷 第1期
1987年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.4, No.1
March, 1987

一类非线性系统的自校正预报器及其应用

刘铁男

（大庆石油学院）

摘　要

本文对一类较广泛的非线性随机系统，提出了两种自校正预报器（简记为STP）和一种自校正递推预报器（简记为STRP）．并且给出了在油田生产上的应用实例．

一、引　言

Wittenmark 对SISO线性随机系统，提出了STP [1]．之后 Keyser 等人对同样系统，给出了STRP [2]．邓自立直接从原始的多变量线性模型出发，给出了两种多变量STRP [3]．

本文对单输出非线性随机系统，提出了两种STP和一种STRP．并且在油田采油指数的预报中得到令人满意的结果，预报误差的相对值均在2%以内．

二、非线性自校正预报器

我们考虑的非线性模型是有实际背景的．在某油田生产中，由自喷转为用电（油）泵抽油，其中一个重要的生产指标——采油指数发生较大变化，主要的影响因素是流饱压力比（$P_1 = P_W/P_b$）的变化，其次是地饱压力比($P_2 = P_d/P_b$)的变化(P_2较P_1有相对稳定性），并且P_1和P_2是可量测的．现在生产上急需研究采油指数η随P_1和P_2变化而变化的趋势．η的机理静态模型为

$$\eta = \frac{\eta_b}{[a_1 + b_1 \log(P_2)]P_1 + a_2(P_2)^{b_2}} = f[P_1, P_2, \underline{b}], \qquad (1)$$

其中η_b是饱和压力下的采油指数，$\underline{b}^{\tau} = (a_1, a_2, b_1, b_2)$是未知参数．

因为生产过程是一个动态系统，并且总存在一些随机干扰．所以把（1）式这样一类模型演化为下面的非线性随机动态模型，更符合实际情况（用我们习惯的变量表示）：

本文于1985年3月6日收到．1985年7月23日收到修改稿．

$$A(q^{-1})y(k)=f[u(k-d),\underline{b}]+C(q^{-1})e(k),\tag{2}$$

其中 $y(k)$ 是一维输出，$u(k)$ 是 r 维已知输入，$f[\cdot,\cdot]$ 是结构已知的非线性函数，d 是时滞，$\underline{b}$ 是 r 维参数向量，而后移算子 q^{-1} 的多项式为

$$A(q^{-1})=1+A_a(q^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n}a_iq^{-i},\tag{3}$$

$$C(q^{-1})=1+C_c(q^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n}C_iq^{-i}.\tag{4}$$

模型（2）满足条件：(A)、$A(z)$、$C(z)$ 的零点在单位圆外；(B)、$e(k)$ 是零均值白噪声。模型（2）可以包括较广的一类非线性模型。对它我们先导出两种STP。

（一）第一种自校正预报器

我们记 $\hat{y}(k+l|k)$ 为 $y(k+l)$ 的基于 k 时刻已知信息的向前 l 步预报。引入指标函数

$$V=E\{[y(k+l)-\hat{y}(k+l|k)]^2\}=E\{\varepsilon(k+l)^2\}.\tag{5}$$

我们的目的是寻求最优（最小方差）预报使指标函数（5）达到最小。为此引入下列等式[4]：

$$C(q^{-1})=A(q^{-1})G(q^{-1})+q^{-l}F(q^{-1}),\tag{6}$$

$$G(q^{-1})=1+G_g(q^{-1})=1+\sum_{i=1}^{l-1}g_iq^{-i},\tag{7}$$

$$F(q^{-1})=\sum_{i=0}^{n-1}f_iq^{-i}.\tag{8}$$

我们有如下定理：

定理1　当模型（2）结构和参数已知时，并且满足相应条件(A)和(B)，则有极小化指标函数（5）的最优预报器

$$\hat{y}(k+l|k)=G(q^{-1})f[u(k+l-d),\underline{b}]+F(q^{-1})y(k)-C_c(q^{-1})\hat{y}(k+l|k).\tag{9}$$

证　把（2）式中 k 换为 $k+l$，该式两边乘 $G(q^{-1})$ 得

$$G(q^{-1})A(q^{-1})y(k+l)=G(q^{-1})f[u(k+l-d),\underline{b}]+C(q^{-1})G(q^{-1})e(k+l).$$

应用（6）式并整理得

$$C(q^{-1})[y(k+l)-G(q^{-1})e(k+l)]=F(q^{-1})y(k)+G(q^{-1})f[u(k+l-d),\underline{b}],$$

$$y(k+l)=C(q^{-1})^{-1}\{F(q^{-1})y(k)+G(q^{-1})f[u(k+l-d),\underline{b}]\}+G(q^{-1})e(k+l).\tag{10}$$

把（10）代入（5）式，并注意上式最后项与其它项不相关，可得最优预报器

$$\hat{y}(k+l|k)=C(q^{-1})^{-1}\{F(q^{-1})y(k)+G(q^{-1})f[u(k+l-d),\underline{b}]\}. \tag{11}$$

预报误差为 $\varepsilon(k+l)=G(q^{-1})e(k+l)$. 上式两边乘 $C(q^{-1})$ 并注意（4）式得

$$\hat{y}(k+l|k)=F(q^{-1})y(k)+G(q^{-1})f[u(k+l-d),\underline{b}]-C_c(q^{-1})\hat{y}(k+l|k).$$

证毕.

于是有预报模型

$$\begin{aligned}y(k)&=\hat{y}(k|k-l)+\varepsilon(k)\\&=F(q^{-1})y(k-l)+f[u(k-d),\underline{b}]+G_g(q^{-1})f[u(k-d),\underline{b}]-\\&\qquad C_c(q^{-1})\hat{y}(k|k-l)+\varepsilon(k).\end{aligned} \tag{12}$$

上式中出现了 q^{-1} 的多项式作用于非线性函数的情况．一些非线性自校正调节器（如文〔5〕）也有类似情形．我们规定：$q^{-1}f[u(k-d),\underline{\hat{b}}(k-1)]=f[u(k-d-1),\underline{\hat{b}}(k-2)]$.

于是

$$G(q^{-1})f[u(k-d),\underline{\hat{b}}(k-1)]=f[u(k-d),\underline{\hat{b}}(k-1)]+\sum_{i=1}^{l-1}g_if[u(k-d-i),\underline{\hat{b}}(k-i-1)].$$

为方便，令

$$f[u(k-d-i),\underline{\hat{b}}(k-i-1)]=F_{k-i-1},\quad i=0,1,\cdots,l-1, \tag{13}$$

$$z_1(k)=y(k)-f[u(k-d),\underline{\hat{b}}(k-1)]=y(k)-F_{k-1}. \tag{14}$$

另外（12）式关于参数是非线性的，须用两套公式交互地辨识参数 $\underline{b}$ 和其余参数．把式（13）、（14）用于（12）式有

$$z_1(k)=F(q^{-1})y(k-l)+G_g(q^{-1})F_{k-2}-C_c(q^{-1})\hat{y}(k|k-l)+\varepsilon_1(k). \tag{15}$$

因为 $\{u(k-d-i)\}$ 和 $\{\underline{\hat{b}}(k-i-1)\}$，$i=0,1,\cdots$ 已知，所以 $\{F_{k-i-1},\ i=0,1,\cdots\}$ 是已知常数序列．于是（15）式是线性单输出系统．引入如下向量：

$$\underline{\theta}^\tau=[f_0,f_1,\cdots f_{n-1},g_1,\cdots,g_{l-1},c_1,\cdots,c_n],$$

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(k)^\tau=[&y(k-l),\cdots,y(k-l-n+1),F_{k-2},\cdots,F_{k-l},\\&-\hat{y}(k-1|k-l-1),\cdots,-\hat{y}(k-n|k-l-n)].\end{aligned}$$

于是（15）式可写成

$$\underline{z_1}(k)=\underline{\phi}(k)^\tau\underline{\theta}+\varepsilon_1(k). \tag{16}$$

对于（16）式，文〔6〕的算法有如下形式[7]：

$$\underline{\hat{\theta}}(k)=\underline{\hat{\theta}}(k-1)+\delta\|\underline{\phi}(k)\|^{-2}\underline{\phi}(k)\{z_1(k)-\underline{\phi}(k)^{\tau}\underline{\hat{\theta}}(k-1)\},\tag{17}$$

这里 δ 是正常数，$0<\delta\leq 1$，而$\|\cdot\|$是欧氏范数。把$\underline{\hat{\theta}}(k)$代入（12）式，并令$z_2(k)=y(k)-\underline{\phi}(k)^{\tau}\underline{\hat{\theta}}(k)$，则有

$$z_2(k)=f[u(k-d),\underline{b}]+\varepsilon_2(k).\tag{18}$$

对（18）式，文[6]的算法有如下形式[7]：

$$\underline{\hat{b}}(k)=\underline{\hat{b}}(k-1)+\delta\|\nabla_{\underline{b}}f[\underline{\hat{b}}(k-1),k]\|^{-2}\nabla_{\underline{b}}f[\underline{\hat{b}}(k-1),k]\{z_2(k)$$

$$-f[u(k-d),\underline{\hat{b}}(k-1)]\},\tag{19}$$

其中 $\nabla_{\underline{b}}f[\underline{\hat{b}}(k-1),k]=\dfrac{\partial}{\partial \underline{b}}f[u(k-d),\underline{b}]\Big|_{\underline{b}=\underline{\hat{b}}(k-1)}$.

于是此 STP 可用如下步骤实现：

1）$f[\cdot,\cdot]$的结构可由实际系统的机理来确定，而模型（16）的阶数可事先离线地确定[8]。然后在 k 时刻用算法（17）得到（16）式中 $\underline{\theta}$ 的估值，用式（19）求（18）式中 $\underline{b}$ 的估值。

2）把$\underline{\hat{\theta}}(k)$和$\underline{\hat{b}}(k)$代入（12）式（注意$\underline{\hat{b}}(k)$代入（12）式第二项），于是可得向前$l$步 STP 为

$$\hat{y}(k+l|k)=f[u(k+l-d),\underline{\hat{b}}(k)]+\sum_{i=0}^{n-1}\hat{f}_i(k)y(k-i)$$

$$+\sum_{i=1}^{l-1}\hat{g}_i(k)f[u(k+l-d-i),\underline{\hat{b}}(k-i)]-\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_i(k)\,\hat{y}(k+l-i|k-i).$$

本文在分析给出的两种STP和一种STRP的渐近最优性时，用到文[9]的定理3和4。须指出的是：上述定理对处理“自校正”问题而得到的预报模型（如（12）及下文(23式)仍成立。这时(12)和（23）式中 $\varepsilon(k+l)$是零均值白噪声的滑动平均，并且分别与相应模型的其它项不相关。于是由文[9]定理证明知，对这样的$\varepsilon(k+l)$仍可证明$\underline{\theta}^*$（$\underline{\theta}$的真值）是相应算法对应的微分方程的平稳点，而原定理中关于零均值白噪声的条件，也只是在证明这一点时用到了。

如果残差$\varepsilon_1(k)$和$\varepsilon_2(k)$分别与（16）和（18）式右边其它项不相关，并且都有零均值，则如上述，当$k\to\infty$时，有$\lim\limits_{k\to\infty}\underline{\hat{\theta}}(k)=\underline{\theta}^*,a\cdot s\cdot$；$\lim\limits_{k\to\infty}\underline{\hat{b}}(k)=\underline{b}^*,a\cdot s$（这里$\underline{\theta}^*$、$\underline{b}^*$表示相应参数的真值）。于是STP（20）渐近于最优预报器（9）。若

$\varepsilon_1(k)$和$\varepsilon_2(k)$不满足上述条件，则STP（20）将是次优的。

（二）第二种自校正预报器

定理 2 当模型（2）结构和参数已知时，并且满足相应条件(A)和(B)，则有极小化指标函数（5）的最优预报器

$$\hat{y}(k+l|k)=-\sum_{i=1}^{n}a_i\hat{y}(k+l-i|k-i)+f[u(k+l-d),\underline{d}]+\sum_{i=0}^{n-1}f_ie(k-i). \tag{21}$$

证 把（2）式中k换为$k+l$，并应用（6）式得

$$A(q^{-1})[y(k+l)-G(q^{-1})e(k+l)]=f[u(k+l-d)],\underline{b}]+F(q^{-1})e(k),$$

$$y(k+l)=G(q^{-1})e(k+l)+A(q^{-1})^{-1}[f[u(k+l-d),\underline{b}]+F(q^{-1})e(k)]. \tag{22}$$

把（22）式代入（5）式，并注意上式右边两项是不相关的，于是有最优预报器

$$\hat{y}(k+l|k)=A(q^{-1})^{-1}[f[u(k+l-d),\underline{b}]+F(q^{-1})e(k)].$$

上式两边乘$A(q^{-1})$，并应用（3）式得

$$\hat{y}(k+l|k)=-\sum_{i=1}^{n}a_i\hat{y}(k+l-i|k-i)+f[u(k+l-d),\underline{b}]+\sum_{i=0}^{n-1}f_ie(k-i).$$ 证毕。

相应的预报模型为

$$y(k)=-A_a(q^{-1})\hat{y}(k|k-l)+f[u(k-d),\underline{b}]+F(q^{-1})e(k-l)+\varepsilon(k). \tag{23}$$

并且若假定观测起点$k_0=-\infty$，$C(z)$的零点在单位圆外，则（21）中$\{e(k)\}$可用已知数据计算为

$$e(k)=[C(q^{-1})]^{-1}\{A(q^{-1})y(k)-f[u(k-d),\underline{b}]\}, \tag{24}$$

其中$[C(q^{-1})]^{-1}$可象文[3]那样计算。

当模型（23）结构和参数未知且$k_0\neq-\infty$时，可用如下步骤实现STP：

1）象（一）节一样确定（23）的结构，用文[6]的算法估计其参数，为此置（这里$\underline{b}^{\tau}=(b_1,\cdots,b_r)$）

$$\underline{\theta}^{\tau}=(a_1,\cdots,a_n,\underline{b}^{\tau},f_0,\cdots,f_{n-1}).$$

为方便，令

$$F(\underline{\theta},k)=-A_a(q^{-1})\hat{y}(k|k-l)+f[u(k-d),\underline{b}]+F(q^{-1})e(k-l).$$

于是（23）式可写成

$$y(k)=F(\underline{\theta},k)+\varepsilon(k). \tag{25}$$

上式中的$e(k-l-i)$，$i=0,1,\cdots,n-1$可用下式的计算值代替：

$$\hat{e}(k)=y(k)-F(\underline{\hat{\theta}}(k-1),k), \tag{26}$$

对于(25)式，文〔6〕的算法有如下形式[7]：

$$\underline{\hat{\theta}}(k)=\underline{\hat{\theta}}(k-1)+\delta\|\nabla_{\underline{\theta}}F[\underline{\hat{\theta}}(k-1),k]\|^{-2}\nabla_{\underline{\theta}}F[\underline{\hat{\theta}}(k-1),k]\{y(k)-F[\underline{\hat{\theta}}(k-1),k]\},\tag{27}$$

其中 $\nabla_{\underline{\theta}}F[\underline{\hat{\theta}}(k-1),k]=\left.\dfrac{\partial}{\partial\underline{\theta}}F[\underline{\theta},k]\right|_{\underline{\theta}=\hat{\theta}(k-1)}$.

2)把$\underline{\hat{\theta}}(k)$和$\{\hat{e}(k)\}$代入(21)式，可得到STP如下：

$$\hat{y}(k+l|k)=-\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i(k)\hat{y}(k+l-i|k-i)+f[u(k+l-d),\ \underline{\hat{b}}(k)]+\sum_{i=0}^{n-1}\hat{f}_i(k)\hat{e}(k-i).\tag{28}$$

前面已指出，对于(23)(即(25))这样的预报模型，文〔9〕定理4仍成立，于是当$k\to\infty$时，$\lim\limits_{k\to\infty}\underline{\hat{\theta}}(k)=\underline{\theta}^*$，$a\cdot s\cdot$。于是(28)将渐近于最优预报器(21)。

三、非线性自校正递推预报器

我们从非线性模型(2)出发给出STRP。首先把(2)式中k换为$k+l$，并用(3)式得

$$y(k+l)=-A_a(q^{-1})y(k+l)+f[u(k+l-d),\ b]+C(q^{-1})e(k+l).\tag{29}$$

设$\mathbf{F}_k$是由$\{e(k),u(k-d),e(k-1),u(k-d-1),\cdots\}$生成的$\sigma$—代数。设(29)式结构和参数已知。由条件数学期望的性质[10]知，(5)式可写成

$$V=E\{E\{[y(k+l)-\hat{y}(k+l|k)]^2\}|\mathbf{F}_k\},\ l=1,2,\cdots,L.\tag{30}$$

于是由(30)和(26)式可得最优预报器为

$$\hat{y}(k+l|k)=\begin{cases}-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\hat{y}(k+l-i|k)+f[u(k+l-d),\ \underline{b}]+\sum\limits_{i=l}^{n}c_ie(k+l-i) & 当1<l\leq n时,\\ -\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\hat{y}(k+l-i|k)+f[u(k+l-d),\ \underline{b}] & 当l>n时.\end{cases}\tag{31}$$

在上式中规定：$i\geq l$时，$\hat{y}(k+l-i|k)=y(k+l-i)$，并且在满足前述条件时，可由(24)式计算$\{e(k)\}$。

当模型(29)结构和参数未知且$k_0\neq-\infty$时，可用如下步骤实现STRP：

1)用前述方法确定(29)式的结构，用形如(27)式的算法估计预报器(31)中

的参数，而（31）式的$\{e(k)\}$用形如（26）式来计算；

2）把计算出的$\underline{\hat{\theta}}(k)$和$\{\hat{e}(k)\}$代入（31）式可得到STRP。并且由文[9]定理4知，$k\to\infty$时，$\lim\limits_{k\to\infty}\underline{\hat{\theta}}(k)=\underline{\theta}^*$，$a.s.$。则此STRP将渐近于最优预报器（31）。

为进一步提高STP和STRP的预报精度，可以在状态预报之前，先对模型中参数进行预报，详见下节。

四、应 用 实 例

我们应用本文给的方法对采油指数η作了大量预报，处理了七个区块，21组数据，都得到很好的结果。为省篇幅仅举两个区块六组数据为例，其数据列在表（1）中。依据表（1）数据，建立了如下模型：

$$\eta(k)=a_1\eta(k-1)+a_2\eta(k-2)+f[P_1,P_2,\underline{b}]+c_1e(k-1)+c_2e(k-2)+e(k), \quad (32)$$

其中　$f[\cdot,\cdot,\cdot]$的结构同（1）式。

为进一步提高状态预报精度，我们对参数也作了与状态同步数预报[11]。由表1可见，η的实际数据有一个下降的趋势，在依据上述数据对（32）式中参数估计时，发现

表1　两个区块六组数据

P_1 \ 地区 P_2	区块1			区块2		
	1.0	1.1	1.2	1.0	1.1	1.2
1.0	3.65	3.72	3.81	3.91	3.95	3.97
0.95	3.32	3.51	3.59	3.52	3.59	3.69
0.90	2.93	3.08	3.28	3.06	3.24	3.43
0.85	2.54	2.81	3.04	2.80	3.04	3.26
0.80	2.30	2.54	2.83	2.53	2.80	3.06
0.75	2.15	2.42	2.72	2.37	2.65	2.94
0.70	1.95	2.30	2.61	2.17	2.49	2.84
0.65	1.83	2.22	2.55	2.09	2.41	2.78
0.60	1.75	2.15	2.50	1.98	2.31	2.68
0.55	1.68	2.07	2.46	1.93	2.25	2.63
0.50	1.62	1.99	2.42	1.88	2.21	2.58

估值序列也有同样趋势，这启示我们用“参数平均增量”法。用$\Delta\underline{\theta}$表示参数的平均增量，用$\underline{\hat{\theta}}^*(k+l)$表示对参数的$l$步预报，则有：

$$\underline{\hat{\theta}}^*(k+l)=\underline{\hat{\theta}}(k)+l\cdot\Delta\underline{\theta},$$

$$\Delta\theta=\frac{1}{l}\sum_{j=k-l+1}^{k}[\hat{\theta}(j)-\hat{\theta}(j-1)].$$

表 2　η的预报值和预报误差的相对值

	预报值	相对误差	预报值	相对误差	预报值	相对误差
区块1	1.828	0.84%	2.194	1.2%	2.522	1.1%
	1.748	0.97%	2.120	1.4%	2.481	0.75%
	1.681	-0.54%	2.056	0.59%	2.451	0.38%
	1.621	-0.81%	2.002	-0.64%	2.425	-0.22%
	1.61		1.956		2.345	
	1.568		1.915		2.325	
	1.529		1.878		2.308	
区块2	2.01	-1.5%	2.373	1.5%	2.824	0.57%
	1.942	-0.62%	2.309	0.08%	2.743	1.1%
	1.881	-0.05%	2.257	-0.32%	2.686	-0.24%
	1.838		2.213	-0.11%	2.632	0.07%
	1.793		2.145		2.583	0.01%
	1.75		2.113		2.464	
	1.71		2.084		2.426	

我们用STP预报了区块1的采油指数η，取预报步数$l=4$。为省篇幅，对每组数据仅列出了对应最后四个数据的预报值。并且对第一组数据用的是第（一）节的STP，后两组数据则用第（二）节的STP。最大预报误差相对值是1.4%。并且对η的未来趋势（数据未知）也作了预报。

用STRP预报了区块2的采油指数η。对其中三组数据，分别取预报步数为3、4和5并且分别列出了对应其最后3、4和5个数据的预报值。最大相对误差为1.5%。并对η的未来趋势也作了预报。

五、结　论

本文对较广泛的一类非线性系统给出了两种STP和一种STRP。使“自校正”的概念在非线性系统的领域前进了一步。并且通过对实际非线性时变系统的预报可见，它们对此类系统具有较好的适应性，预报精度较高。提高了传统预报方法的精度。例如，用最小二乘法以曲线拟合处理上述问题，预报的相对误差为10%左右。并且本文给出的STP（特别是第二种）和STRP计算量（比对线性系统用最小二乘法辨识）较小，便于应用和推广。

参考文献

〔1〕 Wittenmark, B., IEEE Trans. Autom. Cont., A Self-tuning Predictor, AC-**19** (1974), 848-851.

〔2〕 Keyser, R. M. C. and A. R. Van Cauwenberghe, A Self-tuning Multistep Predictor Application, Automatica, **17** (1981), 167-174.

〔3〕 邓自立、赵永胜等，多变量多步自校正递推预报器及其应用，自动化学报，**9**, 2 (1983), 241-246.

〔4〕 Åström, K. J., Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, New York, (1970), 174-175.

〔5〕 Zanker, P. and P. E. Wellstead(1979), Practical Features of Self-tuning, Proc. 5th IFAC Symp. System Identification and Parameter Estimation, 1148.

〔6〕 Z. G. Han (1982), A Recursive Estimates Method of the Nonlinear Stochastic System and its Convergence Analysis, 6th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, Washington D. C..

〔7〕 姜继忱，关于一类递推算法的进一步探讨，黑龙江大学自然科学学报，1, (1982), 18-28.

〔8〕 Åström, K. J., Eykhoff, P., Automatica, System Identification a Survey, **7** (1971), 123-162.

〔9〕 韩志刚，关于递推算法收敛性分析的常微分方程方法，黑龙江大学自然科学学报，1, (1982), 1-13.

〔10〕 严士健等，概率论基础，科学出版社，(1982), 307-308.

〔11〕 韩志刚，动态系统预报的一种新方法，自动化学报，**9**, 3, (1983), 161-168.

SELF-TUNING PREDICTORS FOR NONLINEAR SYSTEMS AND THEIR APPLICATION

Liu Tienan

(Daqing petroleum Institute)

Abstract

This paper presents two kinds of self-tuning predictors and a kind of self-tuning recursive predictors for nonlinear systems. And a practical example in the oil field production is given.