第4卷 第1期
1987年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.4, No.1
March, 1987

线性多变量系统设计自由度利用的探讨

曹长修　　唐小我

（重庆大学）（成都电讯工程学院）

摘　要

本文提出一种参数最优化的方法，对状态反馈阵最小范数问题和最优极点配置问题进行了探讨．前者归结为平方和形式函数无约束极小化问题，后者归结为多元多项式函数无约束极小化问题．

一、引　言

对于多输入线性定常可控系统，为配置一组希望的闭环极点，所需状态反馈阵并非唯一。本文利用这种非唯一性所提供的自由度使系统进一步优化，使之在其它方面得到改善。

1．状态反馈阵最小范数问题[1]

问题提法：对于可控系统 $\dot{x}=Ax+Bu$，求状态反馈阵 K，使闭环阵 $A_c=A+BK$ 具有预先给定的一组特征值，且使

$$J=\mathrm{tr}KK^T=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}k_{ij}^2=\min.$$

2．最优极点配置问题

这里对最优极点配置问题的提法是：对于给定可控系统 $\dot{x}=Ax+Bu$，求状态反馈阵 K，使闭环阵 $A_c=A+BK$ 具有预先给定的一组特征值，且使

$$J=\int_0^{\infty}(x^TQx+u^TRu)dt=\min,$$

其中 $R=R^T>0$ 和 $Q=Q^T>0$ 由设计者给定．

本文在解决上述两类问题时将整个过程分为两个阶段：先在 Luenberger 可控标准形基础上配置闭环极点，然后引入自由参数，进行系统优化．

本文于1985年3月4日收到．1985年9月11日收到修改稿．

二、多输入系统的可控标准形及其极点配置

1. Luenberger 可控标准形[2]

设有可控线性定常系统Σ_1：$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$，$\mathbf{A}=n\times n$，$\mathbf{B}=n\times m$，$\mathbf{B}$为列满秩阵

则通过变换$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{T}\mathbf{x}$，$\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{H}\mathbf{u}$，$\Sigma_1$可变换为$\Sigma_2$：

$\dot{\hat{\mathbf{x}}}=\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{u}}$，式中$\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$，$\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{H}^{-1}$，

$\hat{\mathbf{A}}$，$\hat{\mathbf{B}}$为如下形式的分块矩阵：

$$\hat{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{1m}\\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \\ \hat{\mathbf{A}}_{m1} & \hat{\mathbf{A}}_{m2} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{mm}\end{pmatrix},\qquad \hat{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{B}}_1 & & & 0\\ & \hat{\mathbf{B}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{\mathbf{B}}_m\end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{ii}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ * & \cdots & * & *\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\,|\,\mathbf{I}_{\sigma_i-1}\\ \hline \hat{\mathbf{a}}_{ii}^T\end{bmatrix}=\sigma_i\times\sigma_i$$
,式中$*$表示不一定为零的常

$$\hat{A}_{ij}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & & 0\\ * & \cdots & *\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \hline \hat{\mathbf{a}}_{ij}^T\end{bmatrix}=\sigma_i\times\sigma_j,\quad (i\neq j),$$

$$\hat{\mathbf{B}}_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\sigma_i\times 1,\qquad \text{而}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i=n,$$
σ_i称为克罗内克指数.

2. 极点配置公式

在 Luenberger 可控标准形上很容易配置闭环极点，下面给出极点配置公式的推导过程. 定义

$$d_i=\sum_{j=1}^{i}\sigma_j\quad (i=1,\cdots,m),$$

令由$\hat{\mathbf{A}}$中第$d_i(i=1,\cdots,m)$行所构成的矩阵为$-\hat{\mathbf{K}}_1$，即

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = -\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}^T_{11} & \hat{\mathbf{a}}^T_{12} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}^T_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}^T_{m1} & \hat{\mathbf{a}}^T_{m2} & \cdots & \hat{\mathbf{a}}^T_{mm} \end{pmatrix} = m\times n.$$

把所给 n 个希望闭环极点分为 m 组，每组的个数取为 $\sigma_i(i=1,\cdots,m)$。设第 i 组极点所对应的稳定多项式为

$$\begin{aligned}\varphi_i(s) &= (s-s_{i1})(s-s_{i2})\cdots(s-s_{\sigma_i}) \\ &= s^{\sigma_i}+\alpha_{i\sigma_i-1}s^{\sigma_i-1}+\cdots+\alpha_{i1}s+\alpha_{i0}.\end{aligned}$$

记　$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = [\alpha_{i0}\ \ \alpha_{i1}\cdots\alpha_{i\sigma_i-1}]^T = \sigma_i\times 1.$

令
$$\hat{\mathbf{K}}_2 = -\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T_1 & & & \mathbf{0} \\ & \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T_m \end{pmatrix} = m\times n$$

及
$$\hat{\mathbf{K}}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}^T_{12} & \hat{\mathbf{K}}^T_{13} & \cdots & \hat{\mathbf{K}}^T_{1m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}^T_{23} & \cdots & \hat{\mathbf{K}}^T_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\mathbf{K}}^T_{m-1\,m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} = m\times m.$$

$(\hat{\mathbf{K}}^T_{ij} = 1\times\sigma_i$ 为自由参数向量)

令 $\hat{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^{3}\hat{\mathbf{K}}_i$，对系统 $(\hat{\mathbf{A}},\ \hat{\mathbf{B}})$ 施行状态反馈 $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{x}}$，则闭环系统的状态矩阵为

$$\hat{\mathbf{A}}_c = \begin{pmatrix} \left[\dfrac{0\,|\,\mathbf{I}_{\sigma_1-1}}{-\hat{\boldsymbol{\alpha}}^T_1}\right] & \left[\dfrac{\mathbf{0}}{\hat{\mathbf{K}}^T_{12}}\right] & \left[\dfrac{\mathbf{0}}{\hat{\mathbf{K}}^T_{13}}\right] & \cdots & \left[\dfrac{\mathbf{0}}{\hat{\mathbf{K}}^T_{1m}}\right] \\ & \left[\dfrac{0\,|\,\mathbf{I}_{\sigma_2-1}}{-\hat{\boldsymbol{\alpha}}^T_2}\right] & \left[\dfrac{\mathbf{0}}{\hat{\mathbf{K}}^T_{23}}\right] & \cdots & \left[\dfrac{\mathbf{0}}{\hat{\mathbf{K}}^T_{2m}}\right] \\ & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & \left[\dfrac{0\,|\,\mathbf{I}_{\sigma_m-1}}{-\hat{\boldsymbol{\alpha}}^T_m}\right] \end{pmatrix}.$$

显然，$\hat{A}_c$ 的特征值即为所希望的闭环特征值。返回到原系统就可以得到所需状
反馈阵

$$K = H^{-1}\hat{K}T \qquad (2.$$

$\hat{A}_c$ 的非对角块对特征值无任何影响，因此适当选择非对角块中的自由参数可使系统
它方面的性能得到改善。

考虑到 T 和 H 均为常数阵，易知 K 阵的元素 k_{ij} 是自由参数的线性函数。设 $\hat{K}_3$
所有自由参数所构成的向量为 $\theta^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_N]$，则一般地有

$$\begin{aligned} k_{ij} &= k_{ij0} + k_{ij1}\theta_1 + \cdots + k_{ijN}\theta_N, \\ &= k_{ij0} + \overline{K}_{ij}^T \theta, \end{aligned} \qquad (2.$$

其中　$\overline{K}_{ij}^T = [k_{ij1} \ k_{ij2} \ \cdots \ k_{ijN}]$。

前面配置闭环极点时通过阵 $\hat{K}_3$ 引入了自由参数，设其个数为 N，则得如下结论

定理 2.1　　$N \geq n/2(m-1)$。

对于多输入系统，$n \geq 2$，于是 $N \geq m-1$。这就证明单秩反馈法所能提供的自
度[1]仅仅是本文提出方法的下界。

在 K 阵中通过 $\hat{K}_3$ 引入了自由参数 $\theta_i (i = 1, \cdots, N)$，无论 θ_i 取何值都不影响已
置好的闭环极点。实际上这里的系统优化是无约束参数最优化问题。以下讨论中均认
K 按（2.1）式确定。

三、状态反馈阵最小范数问题的实用解法

最小范数问题的目标函数

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} k_{ij}^2 .$$

容易证明，$J(\theta)$ 为 R^N 上的可微凸函数，且有下列结果：

定理 3.1　$J(\theta)$ 的极小值存在且使 $J(\theta)$ 取极值的 θ 满足

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} k_{ij0} \overline{K}_{ij} + \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \overline{K}_{ij} \ \overline{K}_{ij}^T \right] \theta = 0.$$

于是，最小范数问题归结为求解线性方程组。

四、最优极点配置问题的实用解法

对于连续系统最优极点配置问题，目标函数为 $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$，其中 R

均为设计者预先确定的实对称正定阵．引入状态反馈 $\mathbf{u}=\mathbf{K}\mathbf{x}$ 后有

$$J=\int_0^\infty \mathbf{x}^T\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{x}dt，\quad 其中\ \hat{\mathbf{Q}}=\mathbf{Q}+\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}。$$

容易证明，

$$J=\mathbf{x}(0)^T\mathbf{P}\mathbf{x}(0)。\tag{4.1}$$

而 $\mathbf{P}$ 满足下列 Liapunov 方程（简称李氏方程）：

$$\mathbf{A}_c^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}_c=-\hat{\mathbf{Q}}．\tag{4.2}$$

上面 $\mathbf{x}(0)$ 和 $\mathbf{A}_c$ 分别为初始向量和闭环状态阵．

本文对李氏方程（4.2）提出一种简便解法，$\mathbf{P}$ 可按如下步骤求出：

1° 计算 $f(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$，

其中 λ_i 为希望的闭环极点．

2° 计算 $f(-\mathbf{A}_c^T)$ 和 $F(Q_i)$

记 $C_0=\mathbf{I}$，$\mathbf{Q}_0=\mathbf{0}$，$\Sigma_{10}=a_n\mathbf{I}$，$\Sigma_{20}=\mathbf{I}$，

记 C_K，Σ_{1k}，Σ_{2k}，$\mathbf{Q}_k$ 按如下公式递推：

$$C_K=C_{k-1}(-\mathbf{A}_c^T),\ \mathbf{Q}_k=\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{A}_c-C_{k-1}\hat{\mathbf{Q}},$$

$$\Sigma_{1k}=\Sigma_{ik-1}+a_{n-k}C_k,\quad \Sigma_{2k}=\Sigma_{2k-1}+a_{n-k}\mathbf{Q}_k,$$

则　$f(-\mathbf{A}_c^T)=\Sigma_{1n}$，　$F(\mathbf{Q}_j)=\Sigma_{2n}$。

3° 计算　$\mathbf{P}=-f(-\mathbf{A}_c^T)^{-1}F(\mathbf{Q}_i)$

前面已指出，$J=\mathbf{x}(0)^T\mathbf{P}\mathbf{x}(\mathbf{0})$，显然 J 依赖于系统的初始状态 $\mathbf{x}(0)$。设 $\mathbf{x}(0)^T=[x_{01}\quad x_{02}\cdots x_{0n}]$ 为满足下列条件的随机向量：

1° $x_{0i}(i=1,\cdots,n)$ 为相互独立的随机向量；

2° $Ex_{0i}=0$，　$Ex_{0i}^2=1$，　$i=1,\cdots,n$。

按上述假设，J 成为随机变量，现将目标函数修改为 $EJ=E\mathbf{x}(0)^T\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$。可以证明 $EJ=\mathrm{tr}\mathbf{P}$．由于 $\mathbf{A}_c$ 的特征值由设计者给定，则 $\det f(-\mathbf{A}_c^T)$ 是确定不变的．考虑到这一点，立即可得到：

定理 4.1　$EJ=\mathrm{tr}\mathbf{P}$ 是以自由参数 $\theta_i(i=1,\cdots,N)$ 为自变量的多元多项式函数．

笔者已编制了这种函数无约束极小化参数寻优的计算机程序．以上结果可推广到离散系统，结果很相似．

五、计算实例和仿真结果

例[3]　设有线性系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$．希望闭

环极点为 $\Lambda=\{-0.45\pm j0.96,\ -2.08\}$，求状态反馈阵 **K**.

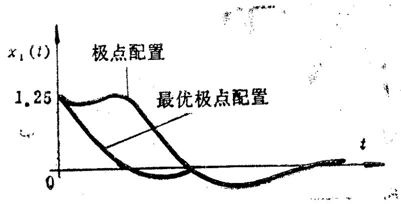
解 按文献[3]极点配置方法设计的结果为

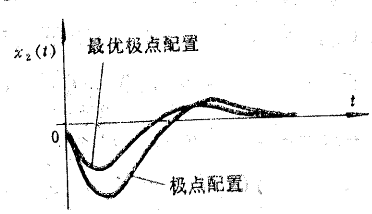
$$\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix}-0.6151 & -1.842 & 0.0845\\ -0.0277 & -0.7063 & -1.543\end{bmatrix}.$$

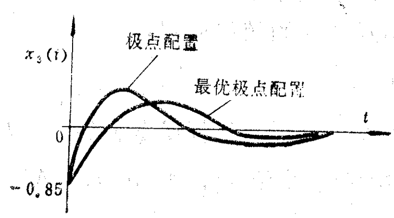
按本文提出的方法（取 $\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(20,5,\ 1)$，$\mathbf{R}=\mathrm{diag}(1,1)$设计的结果为

$$\mathbf{K}_2=\begin{bmatrix}-0.9183 & -1.0645 & -0.8955\\ 1.5273 & -0.4570 & -2.0171\end{bmatrix}.$$

为了对按两种不同方法设计出来的闭环系统进行比较，图中给出在相同初始状 $\mathbf{x}(0)^T=[1.25,\ 0,\ -0.85]$下的三组动态响应比较曲线。显而易见，采用最优极点配 方法设计的系统，其动态特性得到了很大改进，系统不但能较快地回到平衡点，而且 应曲线的幅度也要小些。







六、结 束 语

本文从参数优化的角度对状态反馈阵最小范数问题和最优极点配置问题进行了 讨。由于极点配置和参数优化分为两个阶段独立进行，可主动考虑系统优化问题，便 工程应用。

参 考 文 献

〔1〕 Louis F. Godbout and David Jordan, Modal Control with Feed-back Gain constraints, PROCEEDINGS, IEE, **122**, 4, (1975), 433—436.

〔2〕 David G. Luenberger, Canonical Forms for Linear Multivariable Systems, IEEE, Transactions on Automatic Control, **12**, (1967), 290—293.

〔3〕 Prevss, H. P. Succesive Pole Shifting by State Controller of Prescribed Structure, IEEE, Transactions on Automatic Control, **33**, 6, (1981), 1059—1071.

STUDY OF THE USE OF DESIGN FREEDOM FOR LINEAR MUTIVARIABLE SYSTEM

Cao Changxiu

(Chongqing University)

Tang Xiaowo

(Chengdu Telecommunication Engineering Institute)

Abstract

A method for parameter optimization is presented. The minimum-norm of state feedback matrix and optimal pole assignment also are studied in this paper. The former belongs to that of the unconstraint minimization of quadratic function, the latter belongs to that of the unconstraint minimization of multivariable polynomial.