第2期　　控制理论与应用　　Vol.4, No.2
1987年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1987

非线性系统的几何方法(下)

目前动态与展望

程代展　　秦化淑

(中国科学院系统科学研究所，北京)

本文的第一部分介绍了几何方法的背景．这一部分介绍目前的进展情况及今后的发展趋势。

四、目前研究的几类课题

本节介绍非线性系统几何方法研究的几类课题，包括主要结果、进展情况和存在的问题。

4.1 能控性与能观性

通常研究的非线性系统有两类．一类为一般非线性系统，在局部坐标下它可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,u), \\ y=h(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

另一类为仿射非线性系统，它在局部坐标下的方程为

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \\ y=h(x), \end{cases} \tag{4.2}$$

它是(4.1)的一种特殊情况。

对于系统(4.1)，与线性系统相应的那种能控性，即存在控制u，使状态从x点控制到给定点x_0，称为强能控[5]．对于强能控，现在只有一些充分条件。强能控不但很难检验，而且一般没有对称性，即从点x能控制到点y，但从点y却不一定能控制到点x。这对研究空间的拓扑结构十分不便．为了克服这些缺点，几何方法中引入了“弱能控”概念.我们说“点x_0是弱能控到点x_T的”指的是：存在x_1，$x_2,\cdots,x_{k+1}=x_T$，使得x_i强能控到x_{i+1}或x_{i+1}强能控制到x_i，$i=0,1,\cdots,k$。

类似于弱能控，几何方法中也常用到“弱能观”这个概念。弱能观指的是：对给定

本文于1986年5月23日收到。1986年7月9日收到修改稿。

的一个点，存在一个邻域，使对邻域内的每一点p，都存在一个控制，在这个控制下，系统对给定点和p点给出不同的输出。弱能观与控制有关，这与线性系统的能观性有所差别。弱能观的概念曾被应用于系统的参数识别等问题中。

对应于弱能控和弱能观的是“能控性秩条件”与“能观性秩条件”。能控性秩条件指的是，对所有的定常控制u，李代数

$$L=\{f(x,\ u)|u=\text{const.}\}_{LA}$$

（作为分布）的维数为n。（n是状态流形的维数）能观性秩条件指的是：上述李代数对输出生成的对偶分布维数为n。即如下形式的微分一型集合

$$\{dL_{X_1}\ L_{X_2}\cdots L_{X_t}\ h_j|t<\infty,\ X_1,\ \cdots,\ X_t\in L,\ h_j\in h\}$$

在实数域$\mathbb{R}'$上的有限线性组合所形成的对偶分布维数为n。

如果系统满足能控性秩条件，则系统弱能控。反之，如果系统弱能控，则几乎处处满足能控性秩条件。类此，能观性秩条件导致弱能观，而弱能观则几乎处处满足能观性秩条件。

对应于线性系统的能达性，非线性系统讨论能接近（accessibility）与强能接近。系统在x_0点“能接近”指存在控制，使从x_0点出发能到达的状态集合为一非空开集，或者说，能达集包含n维非空子流形。强能接近指对任一给定时间T，T时刻的能达集为一n维非空子流形[6]。

对于系统（4.2），能接近与强能接近的概念用得很广。这时，能接近与强能接近分别等价于以下两个李代数

$$\left(\begin{array}{l}\{f,\ g_i|\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}_{LA},\\ \{ad_f^j g_i|\ j\geq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}_{LA}\end{array}\right)$$

（作为分布）的维数为n。

对于系统（4.2），在讨论线性化或讨论观测器问题时，人们有时考虑比能观性秩条件更强的能观性条件：即对输出$h=(h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_r)$，存在指标$n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_r$，$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$，并且$dh_1,\ \cdots,\ dL_f^{n_1-1}h_1;\ \cdots;\ dh_r,\ \cdots,dL_f^{n_r-1}h_r$张成的对偶分布维数为$n$。这实质上就是线性系统能观性条件的仿造。

以上提到的各种强、弱能控，能接近，能观等概念，用到线性系统上，都等价于普通的能控性与能观性。

对于系统（4.2），如果有一个非奇异对合分布Δ，它对f不变，即

$$[f,\ \Delta]\subset\Delta,$$

并且$g_i\in\Delta$，那么，最小的这种分布对应着系统的能控子流形。系统（4.2）可以依它作局部能控性分解[4]。

如果有一个非奇异对合分布Δ，它对f及g_i，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$不变，并且

$$\Delta\subset\ker h_*,$$

那么，最大的这样的Δ对应了系统的不能观子流形。系统（4.2）对这样的分布可以作局部能观性分解[4]。

直到现在，非线性系统的能控性和能观性仍然是人们十分感兴趣的一个问题。已有的结果离问题的彻底解决还很远。但它的确是一个十分困难的问题。例如，最简单的非线性系统应该算是 R^2 上的双线性系统了，而它的能控性也仍在讨论之中。

4.2 线性化问题

非线性系统的线性化问题是非线性系统几何方法中较成熟的一个部分。一个非线性系统可能实质上是线性的，但形式上是非线性的。因此，通过状态空间的一个微分同坯即可变为线性系统。这种系统只能是形为（4.2）的仿射非线性系统，它可以线性化的充要条件是：存在 $n_1, n_2, \cdots, n_m$，$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$。使得 $ad_f^j g_i$，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=0, 1, \cdots, n_i-1$ 线性无关且对李括号可交换[6]。

目前的讨论多集中于仿射系统(4.2)的反馈控制线性化。即寻找一个状态反馈控制 $u=\alpha(x)+\beta(x)v$，（$\beta(x)$ 可逆）和一个微分同坯 $z=\varphi(x)$，使得反馈系统

$$\dot{x}=f(x)+g(x)\alpha(x)+g(x)\beta(x)v$$

经微分同坯后变为完全能控的线性系统 $\dot{z}=Az+Bv$。

4.2.1 状态方程局部线性化：首先给出这个问题解的充要条件的是 Jakudczyk 和 Respondek[7]。以后〔8〕和〔9〕分别对单输入和多输入系统简化了〔7〕中的部分对合条件。

4.2.2 全局线性化问题：状态方程的全局线性化是一个比较困难的问题。首先给出充分条件的是〔10〕。以后，〔11〕给出了一组充分、必要和充要条件。实际上，〔11〕还提供了一种较为方便的线形化方法。目前，在一般情况下易于检验的充要条件尚未找到。

4.2.3 输出反馈线性化：如果反馈控制中的反馈律 $\alpha(x)$ 及 $\beta(x)$ 仅是输出 y 的函数，这样的线性化当然更有利于工程实现。对于这类线性化，〔6〕中作了一些讨论。但总的来说，至今仍没有很大进展。

4.2.4 输入—输出响应线性化：这个问题是寻找形如上述的反馈控制 u，使得系统的输入—输出响应变为线性的。它不要求系统的状态或输出方程为线性的，因此无需寻找微分同坯。这个问题对于使用状态反馈已由 Isidori 等人解决了，见〔12〕。这个问题的输出反馈解还没有解决。另外，〔12〕给出的算法十分复杂。寻找较好算法的问题尚待研究。

4.2.5 完全线性化：寻找反馈控制及微分同坯，使系统的状态方程及输出方程同时线性化的问题称为带输出的线性化或完全线性化。对于单输入系统的局部完全线性化，〔13〕给出了充要条件。对于多输入系统，现在知道的还只是一些充分条件。

4.2.6 动态反馈线性化：用动态补偿的方法把用状态反馈不能线性化的系统线性

化，这是一个新的方向．一些充分条件可在〔14〕中找到．这个问题的一般解尚未找出。

与经典的台劳展开近似线性化相比，上述各种线性化的主要优点是：1）它是没有误差的，因此它也称为精确线性化（exact linearization）．在可线性化的区域内，它总是有效的，对于那些向量场变化大的非线性系统，就更能显示出它的优越性．2）即使是局部线性化，它的可线性化区域往往也是足够大的．粗略地说，只要线性化构造中所需的微分同坯成立的区域都是有效的．因此，工程上往往可以将其作为全局结果来应用．

用几何方法解决线性化问题的最大缺点是计算复杂，这在工程应用上很不方便．国内一些人正在考虑简化线性化算法问题，这是有意义的课题．

4.3　能控不变分布与能控性分布

4.3.1　能控不变分布：众所周知，在线性系统理论中，“$(A,\ B)$—不变子空间”是一个十分重要的概念．这个概念在非线性系统理论中的推广就是“能控不变分布”．对于一般非线性系统，能控不变分布的讨论可见〔15〕．但它的作用还不甚清楚．以下主要介绍对仿射系统的能控不变分布，这时它也称为$(f,\ g)$—不变分布．(f,g)—不变分布在仿射系统的各类解耦问题中所起的作用与线性系统中$(A,\ B)$—不变子空间的作用十分类似．

一个分布Δ，如果满足

$$\begin{aligned}&[f,\ \Delta]\subset\Delta+G,\\&[g_i,\ \Delta]\subset\Delta+G,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{aligned}\tag{4.3}$$

（这里G是由$g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_m$张成的分布），则称Δ为弱$(f,\ g)$—不变分布．

讨论$(f,\ g)$—不变分布的文章很多，如〔16〕等．它们证明了：如果Δ是非奇异对合分布，G以及$G+\Delta$均为非奇异，那么，Δ是局部弱$(f,\ g)$—不变分布等价于存在局部反馈律$\alpha(x)\beta(x)$，使得

$$\begin{aligned}&[f+g\alpha,\ \Delta]\subset\Delta,\\&[(g\beta)_i,\ \Delta]\subset\Delta,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.\end{aligned}\tag{4.4}$$

满足（4.4）的分布称为$(f,\ g)$—不变分布．容易看出，（4.3）对应于线性系统中的

$$AV\subset V+\mathbf{B}.$$

而（4.4）对应于存在反馈F，使得

$$(A+BF)V\subset V.$$

弱$(f,\ g)$—不变性易于检验，而$(f,\ g)$—不变性能直接应用于解耦问题．例如，系统的干扰解耦，输入—输出解耦，状态解耦等问题．因此，探讨这两种不变性的等价性，并构造出反馈律$\alpha(x)$，$\beta(x)$，这不但在理论上有意义，而且，对实际系统设计也十分重要．

对于全局的情况以及奇异的情况，两种不变性的等价性尚在讨论之中．对于全局等价性的一些最新结果可以在〔17〕中找到．

当然，几个分布的相容（f，g）—不变性，即找出一个共同的反馈规律$\alpha(x)$，$\beta(x)$，使得（4.4）式对一族分布Δ_1，Δ_2，…，Δ_k同时成立，也是一个有实际意义的课题。〔18〕中给出一些结果。

4.3.2　能控性分布：非线性系统的能控性分布是线性系统理论中能控性子空间概念的推广。对于仿射非线性系统，如果存在反馈律$\alpha(x)$，$\beta(x)$以及G的一个子分布G_1，使得Δ为包括G_1并且对$f+g\alpha$，$(g\beta)_1$，$(g\beta)_2$，…，$(g\beta)_m$都不变的最小对合分布，则称Δ为一个能控性分布，记作

$$\Delta=\langle f+g\alpha,\ (g\beta)_1,\ \cdots,\ (g\beta)_m|G_1\rangle.$$

对能控性分布的进一步讨论及预见可见〔19〕。在非奇异的假定下，〔4〕给出了包含在一个分布中的最大能控性子分布的算法。

能控性子分布的作用，现在见到的，主要是用于系统的反馈解耦。

4.4　实现问题

对于一般非线性系统，基于对系统能控性与能观性的讨论，〔20〕证明了最小实现的存在性与唯一性问题。〔5〕讨论了最小实现与系统的弱能控性及弱能观性之间的关系。但由于一般非线性系统的复杂性，甚至连它的输入—输出关系应如何描述都还不太清楚。

对于线性系统，输入—输出关系可以用传递函数等来表示。对于仿射非线性系统，输入—输出关系主要是用 Volterra 展式或 Fliess 展式来描述的。这一方面的结果，可参考〔21〕。

由于 Fliess 展式的系数是用李导数描述的，在非线性几何理论中，它显得更为方便。可以证明，展式系数唯一确定了仿射非线性系统的输入—输出关系。

为方便计，我们给出 Fliess 展式：

$$y_j(t)=h_j(x_0)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j_0,\cdots,j_k=0}^{m}L_{g_{j_0}}\cdots L_{g_{j_k}}h_j(x_0)\int_0^t d\xi_{i_k}\cdots d\xi_{i_0},\tag{4.5}$$

这里$g_0\triangleq f$，$u_0\triangleq 1$，第一项以及后面各项积分前的系数统称 Fliess 系数。积分式可依如下方法递推定义：

$$\int_0^t d\xi_i=\int_0^t u_i(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_0^t d\xi_{i_k}\cdots d\xi_{i_0}=\int_0^t u_{i_k}(\tau)\int_0^\tau d\xi_{i_{k-1}}\cdots d\xi_{i_0}\quad k\geq 1.$$

这个展式反映了输入对第j个输出的控制关系。如果展式中只有第一项（漂移项），则说明输入不影响这个输出。如果只有漂移项及单重积分项，则说明输入—输出响应是线性的等等。根据这个道理就可以考虑干扰解耦或线性化等问题。也可以考虑系统的近似实现等。

离散系统的Fliess展式及其应用目前也在讨论之中。

在实现问题中，有一类问题称为模型匹配问题（model matching）。〔22〕讨论了线性模型匹配问题。也有非线性模型匹配问题。这类问题可叙述如下：给定一个线性或非线性模型，对已知的实际系统，设计反馈控制（这个反馈控制可能是状态反馈也可能是带有动态补偿的动态反馈），使得反馈系统的输入—输出响应与给定的模型一样。目前，在这方面的结果都还只是一些充分条件。

4.5 解耦问题

解耦问题无论对线性系统或非线性系统都是十分重要的。它可以使大的复杂的系统分解为若干小的简单的子系统。一般非线性系统的无反馈解耦讨论较多，但反馈解耦难度却很大。目前较实用的结果，主要集中于仿射非线性系统上。以下提到的均指这类系统。

4.5.1 状态方程解耦：系统的状态解耦大致有两类，一类是无反馈解耦，即寻找合适的微分同坯，使系统的状态方程得到完全解耦或三角解耦。〔23〕给出了这个问题解的充要条件。第二类是反馈解耦问题，它显然与能控性子分布族有关。目前，这个问题还在讨论之中。

4.5.2 输入—输出解耦问题：输入—输出解耦问题在线性系统理论中已讨论了二十多年，因此，它是一个熟知的老问题。对于非线性系统，这类问题的提法及初步结果可见〔24〕。直观地说，输入—输出解耦就是寻找状态反馈，使每一块输入只影响相应的块输出。对于单个输入对单个输出的解耦问题，〔4〕给出了充要条件。在某些限制下，〔23〕给出了一般输入—输出块解耦的充要条件。〔18〕在较弱条件下证明了同一结论，并给出解耦算法及标准形。

4.5.3 干扰解耦问题：干扰解耦问题指寻找控制，使干扰不影响输出。一种是干扰完全解耦，即干扰对输出完全无作用。这个问题的解决见〔24〕。另一种是干扰稳态解耦，即使干扰对输出的影响随时间渐趋于0。这个问题尚在讨论之中。

4.5.4 动态反馈解耦：用构造动态补偿器的办法解决非线性系统的解耦问题，这是一个新方向。最新的结果，见〔28〕，但能否用动态补偿的方法解决非线性系统的一般块解耦问题，现在还不知道。

4.5.5 解耦并线性化：寻找反馈，使线性化和输入—输出块解耦同时实现的问题简称为解耦并线性化。它是机器人控制中提出的实际问题。在各块能控性分布独立的条件下，〔2〕及〔25〕解决了这个问题的理论与计算问题。有关结果已在实验室中用于机器人控制。一般解耦并线性化问题现仍在讨论中。

4.6 观测器问题

对于非线性系统，构造非线性观测器是比较困难的。需要一些特殊的要求。例如，对于双线性系统观测器的构造可见〔26〕。对一类仿射非线性系统的观测器构造可见〔27〕等。

〔28〕等用几何方法讨论了一类仿射非线性系统。它们在适当的坐标下可变为线性系统加上输出的非线性项。这样，非线性观测器就很容易构造出来了。

在〔28〕中未考虑控制项。实际上，非线性系统的控制是通过与状态有关的渠道加到系统上的，因此，观测器的构造要考虑到输入。这一点与线性系统不同。这也有待进一步讨论。

几何方法中还讨论系统的可逆性问题，最优控制问题，随机非线性系统等等，这里就不一一介绍了。

五、今后的研究方向

对非线性系统几何理论的研究，有两个比较明显的发展方向：一个是向应用发展。由于几何理论的发展，现在，许多工程技术人员对它表现了很大的兴趣。据笔者所知，除前面提到的机器人控制、飞行器控制等外，现在美国有一些小组专门研究几何理论在电力系统、化学反应系统等中的应用。还有人讨论它在物理系统，特别是天体运行研究中的应用。由于实际系统多半是非线性的，因此，几何理论在工程技术中的应用，有着广阔的前途。

另一个方向是研究更深入的理论问题，如一般非线性系统理论，非线性系统的全局性质等。在对一般非线性系统的讨论中，纤维丛理论起着十分重要的作用。实际上，仿射非线性系统可以用平凡纤维丛来描述。而一般非线性系统用纤维丛来描述是很适当的模式。

在考虑全局性问题时，代数拓扑起着十分重要的作用。因为只有它才能把状态流形与其各种同控制有关的子流形之间的相对拓扑关系描述清楚。

几何方法在计算上常常比较复杂，因此，几何方法在计算机上的实现就成了一项迫切待解的课题。由于计算机的要求，必然会遇到连续系统离散化的问题。这在理论上也会引起新的问题。

最后，应该指出，几何方法只是非线性系统研究中的一种方法。它对系统的结构分析特别有效，但在稳定性分析，优化等问题上未见其长。因此，如何将几何方法与分析方法或其他研究手段结合起来，也是一个十分有意义的研究方向。

参 考 文 献

〔1〕 Brockett, R. W., Nonlinear Systems and Differential Geometry, Proce-edings of the IEEE, **64**, ,1 (1976), 61-72.

〔2〕 Tarn, T. J., Bejczy, A. K., Chen, Y., Nonlinear Feedback in Robot Arm Control, Proceedings of the 23rd IEEE Conf. Decition and Control, Las Vegas, (1984).

〔3〕 Meyer, G., Su, R., Hunt, L. R., Application of Nonlinear Transformations to Automatic Flight Control, Automatica, **20**, 1, (1984) 103-108.

[4] Isidori, A., Nonlinear Control Systems: An Introduction, Lecture Notes in Control Information Sci., **71**, Springer, Berlin, (1985), Chapter 1, Chapter 4.

[5] Hermann, R., Krener, A. J., Nonlinear Controllability and Observability, IEEE Trans. Aut. Contr., **22**, 5, (1977), 728-740.

[6] Respondek, W., Linearization, Feedback, and Lie Brackets, Proceedings of Int. School on App. Geometric Methods to Nonlinear System Theory. Bierutouice, Poland, (1984), 1-38.

[7] Jakubczyk, B., Respondek, W., On Linearization of Control Systems, Bull. Acad., polonaise Sci. Ser. Sci. Math., **28**, (1980), 517-521.

[8] Su, R., On the Linear Equivalents of Nonlinear Systems, Sys. Contr. Lett., **2**, (1982), 48-52.

[9] Hunt, L. R., Su, R., Meyer, G., Multi-input Nonlinear Systems, Diff. Geometric Control Theory, Birhauser, Boston, (1983), 268-298.

[10] Hunt, L. R., Su, R., Meyer, G., Global Transformations of Nonlinear Systems, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-**28**, 1, (1983), 24-31.

[11] Cheng, D., Tarn, T. J., Isidori. A., Global linearization of Nonlinear Systems via Feedback, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-**30**, 8, (1985), 808-811.

[12] Isidori, A., Ruberti, A., On the Synthesis of Linear Input-output Response for Nonlinear Systems, Sys. Contr. Lett., **4**, (1984), 17-22.

[13] Cheng, D., On Linearization and Decoupling Problems of Nonlinear Systems, D. Sc. Dissertation, Washington Univ., St. Louis, MO., U. S. A., (1985), Chapter 4.

[14] Isidori, A., Control of Nonlinear Systems via Dynamic State-feedback, Conf. Alg. Geometr. Methods in Nonlinear Control Theory, Paris, (1985).

[15] Nijmeijer, H., Van Der Schaft, A., Controlled Invariance for Nonlinear Systems, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-**27**, 4, (1982), 904-914.

[16] Nijmeijer, H., Controlled Invariance for Affine Control Systems, Int. J. Contr., **34**, (1981), 824-833.

[17] Dayawansa, W., Cheng, D., Boothby, W. B., Tarn, T. J., On the Global (f,g)-invariance of a Class of Nonlinear Systems, Proc. 25th IEEE Conf. Decition Control, Athens, (1986).

[18] Cheng, D., Design for Noninteracting Decomposition of Nonlinear Systems, Submitted for Publication.

[19] Krener, A. J., Isidori, A., (adf, G)-invariant and Controllability Distributions for Nonlinear Systems, Lecture Notes in Contr. Inform. Sci., **39**, (1982), 157-164.

[20] Sussmann, H. J., Existence and Uniqueness of Minimal Realizations of Nonlinear Systems, Math. Sys. Theory, **10**, (1977), 263-284.

[21] Fliess, M., Lamnabhi, M., Lagarrigue, F. L., An algebraic Approach to Nonlinear Functional Expansions, IEEE Trans. Circ. Sys., CAS-**30**, 8 (1983), 554-570.

[22] Isidori, A., The Matching of a Prescribed Linear Input-output Behavior in a Nonlinear System, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-**30**, 3, (1985), 258-265.

[23] Nijmeijer, H., Schumacher, J. M., Zeros at Infinite for Affine Nonlinear Control Systems, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-**30**, 6, (1985), 566-573.

[24] Isidori, A., Krener, A. J., Gori-giorgi, C., Monaco, S., Nonlinear Decoupling via Feedback: A Differential Geometric Approach, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-**26**, 2, (1981), 331-345.

[25] Tarn, T. J., Cheng. D, Isidori, A., External Linearization and Simultaneous Output Block Decoupling of Nonlinear Systems, Conf. Alg. Geometr. Methods in Nonlinear Control Theory, Paris, (1985).

[26] Grasselli, O. M., Isidori, A., An Existence Theorem for Observers of Bilinear Systems, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-**26**, 6, (1981) 1299-1230.

[27] Kou, S. R., Elliott, D. L., Tarn, T. J., Exponential Observers for Nonlinear Dynamic Systems, Inform. Contr., **29**, 3, (1975), 204-216.

[28] Krener, A. J., Respondek, W., Nonlinear Observers with Linearizable Error Dynamics, SIAM J. Contr. Optimiz., **23**, 2, (1985), 197-215.