第4卷 第2期 控制理论与应用 Vol. 4, No. 2
1987年 6月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS June, 1987

块对角化分散控制的一种算法
——参数插入算法

路精保

（北京航空学院）

摘　要

本文介绍一种参数插入方法，把最优全状态输出反馈转化为块对角形局部反馈，并使整体性能指标最小。文中对该算法的收敛性及对一般控制结构下系统最优解存在的条件及唯一性给以简要证明。

前　言

分散化控制[1]对于解决互相耦合的子系统局部控制综合问题提供了有力手段。[2]中给出了块对角化分散控制的一种有效算法，利用逐块消去和梯度寻优得到块对角化反馈增益。但该文对消块过程的中间结果的系统可稳定性没有证明.文献[3]则采用加权乘子法，对需去掉的增益在性能指标中惩罚，以达到结构约束的目的。这里，笔者采用的方法是以全状态最优输出反馈增益为初始点，从一个平面上对不需要的增益进行切削，使之为零。插入参数$\lambda\in[0,1]$取不同值，代表不同的层次。这里，采用凸函数的概念及李雅普诺夫函数法对每个中间步骤解的存在性与唯一性加以证明，然后讨论整个算法的收敛性及其条件，并推广到一般控制结构下的极小值的判别问题上．文中还给出一个计算实例。

一、问题的提出及参数插入算法

问题描述：对线性定常随机互交连系统S

$$S:\begin{cases}\dot{X}=AX+B_1U+B_2\eta,\\ r=HX+DU,\\ Y=CX.\end{cases}\tag{1.1}$$

用N个子系统$S_i(i=1,\cdots,N)$表示

本文于1985年6月12日收到，1986年7月18日收到修改稿。

$$S_i:\begin{cases}\dot{X}_i = A_{ii}X_i + B_{1i}U_i + B_{2i}\eta_i + h_i(X),\\ h_i(X) = \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N} A_{ij}X_j, i,j=1,\cdots,N,\end{cases} \tag{1.2}$$

其中，$A=\{A_{ij},\ i,j=1,\cdots,N\}$，$B_1=\text{block diag}\ \{B_{1i}, i=1,\cdots,N\}$，$B_2=\text{block diag}\ \{B_{2i}, i=1,\cdots,N\}$，$\eta\in R^p$ 为标准高斯独立过程，X、U、r、Y 分别为状态、控制、响应、输出变量，分别属于 R^n、R^m、R^Y、R^n。这里，由于采用全状态输出反馈，所以 $\dim(X)=\dim(Y)$。此处有 $n=\sum\limits_{i=1}^{N} n_i$，$m=\sum\limits_{i=1}^{N} m_i$，$p=\sum\limits_{i=1}^{N} p_i$，$A$、$B_1$、$B_2$、$H$、$D$、$C$ 为适当维数的常阵。设 N 个子系统 $\{A_{ii},\ B_{1i}\}$ 都是完全可控的（该假设也可以放宽），不失一般性，设 $C=I$。

问题 1　对系统 S 在性能指标

$$J=E(r^TQr) \tag{1.3}$$

下设计分散控制器：

$$U_i=K_iX_i,\ i=1,\cdots,\ N, \tag{1.4}$$

或具有一定结构约束下的总体控制器：

$$U=K^*CX=KX, \tag{1.5}$$

$$K^*\in \mathbf{K}:\{k|k\ \text{具有连接阵}\ E\}, \tag{1.6}$$

使性能指标（1.3）最小。

问题 2　若 $B_2=0$（或 $\eta=0$），对系统 S 在性能指标

$$J=\int_0^{\infty} r^TQr\,dt \tag{1.7}$$

下及初始条件 $\mathbf{X}_0=E(X_0X_0^T)=Q_0$ 下，设计闭环控制器（1.4）或（1.5），使（1.7）达到最小。

这里，$Q\geq 0$，$D^TQD>0$，$X(0)=X_0$。

对问题 1，我们有哈密顿函数 $\mathbf{H}=J+Tr\{P\dot{\mathbf{X}}\}$，

$$\mathbf{H}=Tr[(H+DK^*C)^TQ(H+DK^*C)\mathbf{X}]+Tr\{P[\bar{A}\mathbf{X}+\mathbf{X}\bar{A}^T+B_2B_2^T]\}, \tag{1.8}$$

式中 P 为伴随阵，$\bar{A}=A+B_1K^*C$，$K^*=KC^{-1}$。于是

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}}=0=(H+DK^*C)^TQ(H+DK^*C)+\bar{A}^TP+P\bar{A}, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial P}=0=\mathbf{X}\bar{A}^T+\bar{A}\mathbf{X}+B_2B_2^T, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial K^*}=0=2D^TQ(H+DK^*C)\mathrm{X}C^T+2B_1^T\ P\mathrm{X}C^T, \tag{1.11}$$

其中 $\mathrm{X}=E(XX^T)$为状态方差阵，满足（1.10）式。可以证明，当 $Q_0=B_2B_2^T$ 时，问1.2都有约束（1.9）—（1.11）式，因而有同解。

参数插入算法：定义集合Ω：$\{\omega|\omega\in \text{block diag}(K_i^*,\ i=1,\cdots,N)\}$，选择标参数 $\lambda\in[0,1]$，将最优闭环增益引导到Ω中。

$$K^*(\lambda)\triangleq K^1(\lambda)+\lambda K^2, \tag{1.12}$$

式中 $K^1(\lambda)\in\Omega$，$K^2\in\bar{\Omega}$，$\bar{\Omega}$为块对角为零元素的增益阵集合。具体步骤如下：

① $\lambda=1,k=0$，$\Delta\lambda=1/m$，$K^*(1)=K^1(1)+K^2=\hat{K}^*$，$K_c^1(1)=K^1(1)$；

② $\lambda_{k+1}=\lambda_k-\Delta\lambda$，计算$K^1(\lambda_{k+1})$的预测值$K_p^1(\lambda_{k+1})$：$K_p^1(\lambda_{k+1})=K_c^1(\lambda_k)+[K_c^1(\lambda_k)-K_c^1(\lambda_{k-1})]$，计算 $K^*=K_p^1+\lambda K^2$；

③ 计算$K^1(\lambda_{k+1})$的校正值$K_c^1(\lambda_{k+1})$：由(1.9)(1.10)式计算P、X，由(1.11)求$\partial\mathrm{H}/\partial K^1$。$K^1_{c_{N+1}}=K^1_{c_N}-\varepsilon_NT^{-1}\left.\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial K^1}\right|_{Kc_N}$，$K^*=K^1_c+\lambda K^2$，$N=1,2,\cdots$，直到校正量小于容限为止；

④ $\lambda\leq 0$？否，转入②；

结束。

这里，m为一正整数，可以自动调整，一般选为4或5效果就相当好了。ε_N为λ水平上的对K^1校正寻优步长，采用二次抛物线拟合寻优方法确定。$\hat{K}^*$为全状态输出最优增益，T为$\frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial K^1\partial K^{1T}}$阵，这里没有考虑$K^1$的展开表达方式（见后）。

二、收敛性证明及其推广

定义 1 凸性：设$H(K)$为定义在$m\times n$维欧氏空间$E^{m\times n}$中某个开集O上的函数。若对任何实数$a\in(0,1)$以及O中的任意两点K_1、K_2，恒有

$$H(aK_1+(1-a)K_2)\leq aH(K_1)+(1-a)H(K_2), \tag{2.1}$$

则称$H(K)$为定义在O上的凸函数。

定理 1 若$K\in O$，$H\{Z_1(K),\ Z_2(K),\ \cdots,\ Z_l(K),K\}$关于$K$二次连续可微，满足$\partial H/\partial Z_i\equiv 0,i=1,\ \cdots,\ l$，则$H$为关于变量$K$凸，当且仅当对每一个$K\in O$，有

$$\frac{\partial^2H}{\partial K\partial K^T}\geq 0. \tag{2.2}$$

定理 2 若 H 为关于变量 K 凸，则 H 为关于变量 K 的部分分量 K^1 也是凸的。

定理 3 对问题 1 有

$$\frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial[cs(K^{*T})]\partial[cs(K^{*T})]^T}=2R\otimes\mathsf{Y}, \tag{2.3}$$

这里，$\otimes$为 Kronecker 积[5]，$R\triangleq D^TQD, \mathsf{Y}\triangleq C\mathsf{X}C^T, cs(\cdot)$ 表示将相应矩阵按列排列成一列向量，即若 $K^{*T}=[K_1,K_2,\cdots,K_m]$，则 $cs(K^{*T})=[K_1^T,K_2^T,\cdots,K_m^T]^T$

定理 4 对问题 1、2，有

$$\frac{dJ}{dK^*}=\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial K^*}=2D^TQ(H+DK^*C)\mathsf{X}C^T+2B_1^TP\mathsf{X}C^T, \tag{2.4}$$

其中 X，P 由（1.9）、（1.10）给出。

定理 5 设$O\subset E^{m\circ n}$为一使系统（1.1）渐近稳定的开集，$K^*\in O$，则

i） （1.8）式定义的哈密顿函数在（1.9）、（1.10）式约束条件下关于变量 K^* 是凸的；

ii） 性能指标（1.3）、（1.7）是关于 K^* 凸的；

iii） 若 $K^1\in\Omega\cap O$，则 H 在（1.9）、（1.10）约束条件下关于变量 K^1 是凸的，性能指标（1.3）、（1.7）是关于变量 K^1 凸的。

定理 6 若系统（A, B_2）可控，C行满秩，且存在一稳定分散化控制 $K^1\in\Omega\cap O$，则对任意使系统（1.1）可观的形如（1.3）、（1.7）式的性能指标 J 有

i） 全局控制 $\varepsilon\hat{K}$ 增益下的分散固定模在左复半平面，即[5]

$$R_e\{\Lambda(C,A+B_1\varepsilon\hat{K}C,B_1)\}\triangleq \mathrm{Re}\{\bigcap_{K_d\in\Omega}\sigma(A+B_1\varepsilon\hat{K}C+B_1K_dC)\}<0; \tag{2.5}$$

ii） 存在唯一 $K_d^*\in\Omega\cap O$，使系统

$$\dot{X}=(A+B_1\varepsilon\hat{K}C)X+B_1U+B_2\eta, \tag{2.6}$$

$$U=K_d^*CX \tag{2.7}$$

稳定且性能指标 J 最小。这里 $\varepsilon\in[0,1]$，$\sigma(\cdot)$表示相应矩阵的特征值。

定理 7 在定理 6 的条件下，算法是收敛的。

定理 1.2 显然，定理 3 只需代数上推导即可证明，定理 4 的证明要用到[8]中的结果，是凸性证明的关键。定理 5 可由定理 1—4 推出，定理 6 中 i）是 ii）的显然结果，ii）的证明只要注意到 J 有上、下界以及 J 关于 K^* 的凸性，并推导出严格凸的条件即可证明。定理 7 的证明可以分为两步，先固定 λ，采用李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial K^1}\right)^T\left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial K^1}\right) \tag{2.8}$$

可以证明每一个截面上校正迭代③收敛，然后证明选择适当步长$\Delta\lambda$，总可以使预测

$K^1(\lambda_{k+1})$取值使$K^*(\lambda)$为一稳定系统的增益，能保证每步校正的正常起动．由定理
我们有

$$\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial K_{ij}\partial K_{lt}}=2R(i,l)\cdot \mathrm{Y}(t,j). \qquad (2$$

若将K^1展成列向量，则T阵元素可由（2.9）式求出。对于一般结构约束条件下
优问题有

定理 8 对$K^*\in \mathrm{K}$，定理3至定理7的结论在以K代替Ω条件下全部成立。

定理 9 若$K_1K_2\in\mathrm{K}$为两个稳定控制增益，且$J(\varepsilon K_1+(1-\varepsilon)K_2)$有界，$\varepsilon\in[0,$
则

i） $J(K)$，$K\in\mathrm{K}$在包含$\varepsilon K_1+(1-\varepsilon)K_2$的开域$O$内有唯一最小值$J_{min}$；

ii） 若$CXC^T>0$，则有唯一最优点$\hat{K}\in\mathrm{K}$使$J(\hat{K})=J_{min}$。

推论 1 系统(1.1)在满足J可观、$CXC^T>0$条件下的局部最优解必由—$\varepsilon\in(0,$
所确定的增益$\varepsilon K_1+(1-\varepsilon)K_2$所隔开，使得$J(\varepsilon K_1+(1-\varepsilon)K_2)\to\infty$。

定理9和推论1给出局部最优解的一个判别方法。

三、计 算 例 子

采用文献[2]中 例1

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0.6 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0.5 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 & 3 & 0 & -0.5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right),\quad B_1=\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

$$B_2=I_{6\times 6},\qquad C=I_{6\times 6},\qquad Q=I_{10\times 10},$$

$$H=\left(\begin{array}{c} I_{6\times 6} \\ \hline 0 \end{array}\right)_{10\times 6},\quad D=\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline I_{4\times 4} \end{array}\right)_{10\times 4},$$

利用程序包[7]，在IBM—4341计算机上得到最优增益

$$\overline{K^*}=\left(\begin{array}{cccccc} -0.90035 & -0.24872 & -0.18870 & -0.18230 & -0.31170 & -0.03999 \\ -0.27613 & -0.28998 & -1.1430 & -0.49018 & -0.40061 & -0.12022 \\ -0.46079 & -0.26841 & -0.65357 & -2.2191 & -0.28781 & +0.030961 \\ -0.60680 & -0.13660 & -0.38729 & -0.12069 & -1.1835 & -0.32002 \end{array}\right),$$

最优性能指标$J^*=2.71782$。从$\overline{K^*}$出发，利用该算法得到块对角化增益

$$K^*=\text{block diag}\left\{(-1.1850,-0.33540),\ \begin{pmatrix}-1.4455 & -0.5389\\ -0.93045 & -2.2772\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.(-1.6116,-3.6619)\right\},$$

性能指标 $J=2.9864264$. 这里，采用的 $\Delta\lambda=0.25$，仅用 4 步就使得 $K^*\in\Omega$，即 K^*对角块化了.

结　　论

以上对参数插入算法的收敛性简要地给以证明，诸定理的内容完全可以推广到一般结构约束下（$\in$K）的寻优问题中。定理 9 及推论 1 还给出最小值判别方法。

致谢　本文是在文传源教授指导下进行的，并得到陈禹六、陈宗基、蒋正兴老师的大力帮助，在此表示衷心感谢！

参 考 文 献

〔1〕 Singh, M. G., Decentralized Control, North-Holland Pub. Comp., (1981).

〔2〕 陈禹六，块对角最优化分散控制，控制理论与应用，**1**，2，(1984)，47—59.

〔3〕 Shapiro, E. Y. and Fredricks, D. A., Application of Constrained Constant Optimal Output Feedback to Modern Flight Control Synthesis, System Modeling and Optimization Proc. 10th IFIP, (1981).

〔4〕 Rockafelar, R. T., Convex Analysis, Princeton University Press, (1972).

〔5〕 须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，(1979).

〔6〕 Davision, E. J., The Decentralized Control of Large Scale System, Advances in Large Scale Systems, JAI Press, Inc., **1**, (1984), 61—91.

〔7〕 路精保、张平，《飞行控制系统最优设计及分析》程序包使用说明书，北京航空学院，(1984)。

〔8〕 Bernussou, J. and Geromel, J. C., An Easy Way to Find Gradient Matrix of Composite Matricial Functions, IEEE TR AC-**26**, 2, (1981), 538—540.

A BLOCK DIAGONALIZATION ALGORITHM FOR DECENTRALIZED CONTROL PROBLEMS -PARAMETER IMBEDDING ALGORITHM

Lu Jingbao

(Beijing Institute of Aeronautics and Austronautics)

Abstract

In this paper the parameter imbedding algorithm is introduced, which converts optimal state-output feedback matrix to block diagnalized local feedback matrix and minimizes the global performance index. The convergence of the algorithm and the existance as well as the uniqueness of the solusion for generalized control structuer are proved in brief.