第4卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol.4, No.2
1987年 6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1987

关于《Identification of Multi-variable Continuous Time System From Samples of Input-output Data》的注记

黄新生
（华中工学院，武汉）

摘　要

关于利用采样数据辨识连续时间系统，本文提出了用插值拟合手段将连续时间模型离散化的思想，并从理论的角度，对几种典型的离散模型进行了精度分析，给文[1]的结果，提供了进一步的解释和补充，预示了提高辨识精度的可能途径。

一、引　言

在利用采样数据辨识连续时间系统过程中，对连续时间系统的离散化处理是多种多样的，相应地，就存在各种不同精度的离散模型。采用哪一种离散模型，对于连续时间系统的辨识精度，通常起着决定性的作用。而对于一个离散模型的参数估计，也存在各种精度不同的估计方法，其估计精度直接影响连续时间系统的参数估计精度。文[1]通过实例仿真，对几种典型的离散模型的仿真结果进行了精度比较。本文为了纯粹地比较离散模型的精度，将以数学推导的方式来讨论。

二、模型的离散化及衡量离散模型精度的指标

对于已知函数的离散化，可用Walsh函数逼近[2]，或用块脉冲函数逼近[3]。但对于辨识问题而言，通常测得的只是采样数据，采样间隔中的信息未知，从而，函数逼近失去了目标，一切只能建立在插值拟合的函数上。所以，离散化处理应以插值拟合和数值积分为主要手段，函数逼近只能作为辅助手段。笔者将作零阶插值称为零阶近似；作线性插值称为一阶近似；作出一阶近似后再用块脉冲函数逼近，称为一阶均值近似。一阶均值近似可用块脉冲函数表示为

$$f(t) \doteq [f_1 f_2 \cdots f_m]\Phi(t)^{①}, \tag{1}$$

本文是在韩光文教授指导下完成的。
本文于1985年12月7日收到。1986年9月13日收到修改稿。

①块脉冲函数向量表示（见文[3]）。

其中
$$f_i=\frac{1}{2}[f((i-1)T)+f(iT)].$$

要比较离散模型的精度，必须寻求一个评价指标，为此，对离散化过程作如下分析。设系统为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \tag{2a}$$
$$y(t)=Cx(t)+w(t), \tag{2b}$$

将（2a）从零到 KT 取积分得

$$x(KT)-x(0)=A\int_0^{KT}x(t)dt+B\int_0^{KT}u(t)dt, \tag{3a}$$
$$y(KT)=Cx(KT)+w(KT). \tag{3b}$$

将积分离散处理后就可得到离散模型. 可见，离散模型的精度完全由对积分进行离散处理的近似精度决定. 一般来说，离散模型都可通过积分的方法推导出来。所以，用积分精度来衡量离散模型的精度是合理的，而且也很直观，很方便. 由数值分析的知识我们知道，线性插值的积分精度比零阶插值的积分精度高[4]. 因此，一阶离散模型② 比零阶离散模型精度高.

三、离散模型的精度分析和比较

由方程（2）的解可得

$$x((K+1)T)=e^{AT}x(KT)+\int_0^T e^{At}Bu((K+1)T-t)dt. \tag{4}$$

对 $u((K+1)T-t)$ 作零阶近似（后节点）有

$$x((K+1)T)=e^{AT}x(KT)+\int_0^T e^{At}Bdtu(KT), \tag{5}$$

即为状态转移法离散模型.（见[1]）

将（4）中的 $u((K+1)T-t)$ 作一阶均值近似有

$$x((K+1)T)=e^{AT}x(KT)+\int_0^T e^{At}Bdt\,\frac{1}{2}[u((K+1)T)+u(KT)], \tag{6}$$

即为改进的状态转移法离散模型.（见[1]）

由（3）对 $x(t)$、$u(t)$ 作一阶近似可得

$$x(KT)-x(0)=AT\sum_{i=0}^{K-1}\left[\frac{1}{2}x(iT)+\frac{1}{2}x((i+1)T)\right]+BT\sum_{i=0}^{K-1}\left[\frac{1}{2}u(iT)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}u((i+1)T)\right].$$

②由一阶近似或一阶均值近似所得到的离散模型.

由$x(KT)-x(0)=\sum_{i=0}^{K-1}[x((i+1)T)-x(iT)]$及$K$的任意性可得

$$x((i+1)T)-x(iT)=\frac{AT}{2}[x(iT)+x((i+1)T)]+\frac{BT}{2}[u(iT)+u((i+1)T)].$$

$$x((i+1)T)=\left(I-\frac{AT}{2}\right)^{-1}\left(I+\frac{AT}{2}\right)x(iT)+\left(I-\frac{AT}{2}\right)^{-1}\frac{BT}{2}[u(iT)+u((i+1)T)]. \qquad (7)$$

(7)就是梯形积分法的离散模型.(见[1])

文[1]的仿真结果指出，当输入在子区间中不保持为常数时，状态转移法得到很差的估计，而改进的状态转移法和梯形积分法得到较好的估计．以上推导表明，状态转移法是零阶离散模型，梯形积分法和改进的状态转移法是一阶离散模型．这就是引起精度差别的根本原因．

从推导中我们也可以看出，(6)式只对$u(t)$作了近似处理，而(7)式必须对$x(t)$和$u(t)$都作近似处理，可见，(6)比(7)具有更高的精度，但(6)的参数转换是麻烦的。

块脉冲函数法离散模型也可以由一阶均值近似推导出来，事实上，如果设方程为

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{d^{(i)}}{dt^i}y(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\frac{d^{(i)}}{dt^i}u(t)+\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\frac{d^{(i)}}{dt^i}\varepsilon(t), \qquad (8)$$

其中，$\varepsilon(t)$为噪声，$u(t)$、$y(t)$各阶导数初值为零．对(8)两端进行n次近似积分，每次积分分为如下两步：

i)对方程两端从零到t作一次积分有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{d^{(i-1)}}{dt^{i-1}}y(t)+\int_0^t a_0y(t)dt=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\frac{d^{(i-1)}}{dt^{i-1}}u(t)+\int_0^t\beta_0u(t)dt+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{d^{(i-1)}}{dt^{i-1}}\varepsilon(t)+\int_0^t\gamma_0\varepsilon(t)dt. \qquad (9)$$

利用采样数据对被积函数作一阶均值近似有

$f(t)=[f_1f_2\cdots f_m]\Phi(t)$（$f$代表被积函数之一）；

ii)由近似函数对积分项进行积分，并令$t=KT(K=1,2,\cdots,m)$可得近似积分曲线的采样值

$$\int_0^{KT}[f_1f_2\cdots f_m]\Phi(t)dt=T\sum_{i=1}^{K}f_i, \qquad (10)$$

用向量可表示为

$$[f^{S_1}(T)f^{S_1}(2T)\cdots f^{S_1}(mT)]=T[f_1f_2\cdots f_m]\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\&1&\cdots&1\\&&\ddots&\vdots\\0&&&1\end{pmatrix}. \qquad (11)$$

利用所得到的近似积分曲线采样值，返回 i ）将方程两端再作一次积分，对被积函数$\int_0^t f(t)dt$作一阶均值近似有

$$\int_0^t f(t)dt \doteq T[f^{S_1}(T)f^{S_1}(2T)\cdots f^{S_1}(mT)]\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & 0 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\Phi(t)$$

$$=[f_1 f_2\cdots f_m]P\,\Phi(t)，\text{其中 } P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \frac{1}{2} & & 1 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}T. \tag{12}$$

由 ii ）可得二重积分曲线的采样值

$$[f^{S_2}(T)f^{S_2}(2T)\cdots f^{S_2}(mT)]=[f_1 f_2\cdots f_m]P\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

如此反复过程 n 次，最后将由 ii ）所得的积分采样值作一阶均值近似可得

$$\sum_{i=0}^{n} a_i Y P^{n-i}\Phi(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i U P^{n-i}\Phi(t)+\sum_{i=0}^{n}\gamma_i \varepsilon P^{n-i}\Phi(t), \tag{14}$$

其中，　$Y=[y_1 y_2\cdots y_m]$；　$y_i=\dfrac{y(iT)+y((i-1)T)}{2}$；$\varepsilon$、$U$ 类似.

（14）就是块脉冲函数法的离散模型．显然，它也是一阶离散模型．

与推导块脉冲函数法类似，如果在 i ）中用一阶近似代替一阶均值近似，可推出积分形式的梯形积分法离散模型．由于一阶近似和一阶均值近似在整数倍子区间的积分是完全相同的，即

$$\int_0^{KT}[f_1 f_2\cdots f_m]\Phi(t)dt=\sum_{i=1}^{m}T\left(\frac{f((i-1)T)+f(iT)}{2}\right).$$

右端为梯形积分公式，所以块脉冲函数法与梯形积分法模型具有同样的精度。在文〔1〕中，梯形积分法和改进的状态转移法表现出其辨识精度不如块脉冲函数法，正如文〔1〕指出的，这是因为在估计离散模型参数过程中，对梯形积分法和改进的状态转移法，采用的是差分型方法，而块脉冲函数法本身就是积分型方法，二者对噪声抑制能力的差别影响了仿真结果。

四、结　　语

通过本文的分析和文〔1〕的结果，可预示两种提高辨识精度的可能途径：一是把具有较高精度的改进的状态转移法模型，以积分形式进行参数估计；二是采用高阶近似，推导出更高精度的离散模型。关于这些结果，在以后的文章中再讨论。

参 考 文 献

〔1〕 Sinha, N. K. and Zhou Qijie, Identification of Multivariable Continuous Time System From Samples of Input-output Data, 控制理论与应用，**1**, 1, (1984), 110—121.

〔2〕 Chen C. F. and Hsiao, C. H., Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control Via Walsh Function, IEEE, AC-**20**, 5, (1975), 596—602.

〔3〕 Palanisamy K. R. and Bhattacharya, D. K., System Identification Via Block-Pulse Function, Int. J. Syst. Sci., 12, (1981), 643—651.

〔4〕 李庆杨等编，数值分析，华中工学院出版社，武汉，(1982).

REMARK ABOUT IDENTIFICATION OF MULTI-VARIABLE CONTINUOUS TIME SYSTEM FROM SAMPLES OF INPUT-OUTPUT DATA

Huang Xinsheng

(Huazhong Institute of Technology, Wuhan)

Abstract

In this paper, the accuracies of several typical discrete-time model for the identification of linear continuous-time system are compared, based on theoretical analysis, and the results show the ways to obtain high-accuracy estimation of parameters.