

大型船舶碰撞避免问题的研究*

胡 宁 张嗣瀛

(东北工学院, 沈阳)

摘 要

本文以定性和定量微分对策理论为依据,研究了大型船舶之间的碰撞避免问题。通过采用“有限时间局部捕捉区”的概念^[1]和“集合覆盖法”^[2],发现了一种新性质的曲线——半开关曲线,并得到了危险区和局部危险区。此外,本文还对一类尚未解决的慢船躲快船的碰撞避免问题^[3]给出一种解答。这些结果表明,本文所使用的方法是有效的,所得到的两种区域是有实际意义的。

一、前 言

大型船舶或高速飞行器之间的碰撞问题愈来愈引起人们的重视。因为这类问题经常发生,且损失是严重的。文[3]指出,1970年每350条船中就有一条被完全撞毁,而1972年每40条船中就有一条被完全撞毁。由此可见问题的严重性。近年来,船舶的吨位、体积越来越大,使船的灵活性大大减小,这就更容易造成碰撞。同时,由于世界性的海上贸易活动的急剧增加,使航道上的船运密度迅速增大,碰撞危险性也随之增大。因此研究碰撞避免问题,寻找避免措施是很有实际意义的。

用微分对策研究碰撞避免问题,从所见到的文献来看,通常是按照“最坏情况设计(worst-case design)”进行^[3,4],即一方主动躲避,而另一方则企图造成碰撞。本文也将采用这一做法。

文[3,4]等所用的方法都是把碰撞避免问题用定性微分对策处理,寻求封闭的界栅曲面以划分危险区和安全区。这一做法的缺点在于,它无法处理那些存在着不封闭界栅曲面的问题。例如慢船躲快船的碰撞避免问题^[3]。本文将采用新的方法,同时也对[3]中没有解决的问题给出一种解答。

二、系 统 模 型

1. 系统模型

海面上有两艘大型船只 E 和 P ,由于大质量大体积,故不易改变速度,即使改变

*此项研究系中国科学院科学基金委员会资助项目。

本文于1986年3月4日收到,1986年8月4日收到修改稿。

也需较长时间。因此,假设 P 、 E 均为常速,而且在同一水平面上运动。这样就可采用二车对策模型^[1]。考虑 P 对 E 的相对运动,以 E 为坐标原点, E 的速度方向为 y 轴的正向(图 1)。运动方程为

$$\dot{x} = W_2 \sin \theta - \frac{W_1}{R_1} y u, \quad (1)$$

$$\dot{y} = W_2 \cos \theta + \frac{W_1}{R_1} x u - W_1, \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{W_2}{R_2} v - \frac{W_1}{R_1} u, \quad (3)$$

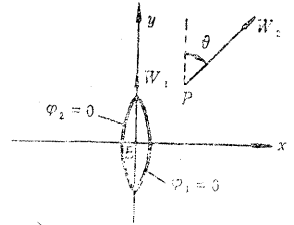


图 1

其中 $-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$, W_1 、 W_2 分别为 E 、 P 的速度,是常数; R_1 、 R_2 分别为 E 、 P 的最小转弯半径; u 、 v 分别是 E 、 P 的控制; θ 是 W_1 与 W_2 之间的夹角,顺时针方向为正。

本文将研究 $W_1 < W_2$ 的情况,这是文[3]所没有解决的问题。

2. 目标集

因为实际碰撞过程与船体大小和外形有关,所以在研究这种问题时,选取与实际船体相符的目标集是有重要意义的。今选取目标集为由两个圆相交的部分(参看图 1):

$$T = \{ (x, y) | \varphi_1(x, y) \leq 0 \} \cap \{ (x, y) | \varphi_2(x, y) \leq 0 \}, \quad (4)$$

其中 $\varphi_1(x, y) = (x+a)^2 + y^2 - (a^2 + b^2)$, $\varphi_2(x, y) = (x-a)^2 + y^2 - (a^2 + b^2)$, $a > 0$, $b > 0$, a 、 b 是常数。

三、界 栅 的 建 立

对 E 来说,只有 P 位于一定的区域(危险区)才能造成碰撞。因此,需要求出这种区域的边界,即微分对策理论中的“界栅”。对于慢船躲快船的碰撞避免问题,可分成两种情况:迎面碰撞和尾追碰撞。下面就分别来求这两种情况下的界栅,并分别称之为下界栅和上界栅。

根据定性极值原理^[5,8],哈密顿函数及伴随方程如下:

$$H = \lambda_1 (W_2 \sin \theta) + \lambda_2 (W_2 \cos \theta - W_1) + \frac{W_1}{R_1} (-\lambda_1 y + \lambda_2 x - \lambda_3) u + \frac{W_2}{R_2} \lambda_3 v, \quad (5)$$

$$\dot{\lambda}_1 = - \frac{W_1}{R_1} u \lambda_2,$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{W_1}{R_1} u \lambda_1,$$

(6)

$$\dot{\lambda}_3 = W_2 (\lambda_3 \sin \theta - \lambda_1 \cos \theta).$$

记 $K = -(-\lambda_1 y + \lambda_2 x - \lambda_3)$, $G = \lambda_3$, 则界栅上最优控制为

$$\bar{u} = \text{sign}(K), \quad \bar{v} = \text{sign}(G). \quad (7)$$

在此基础上, 可求出上界栅的终端状态及最优控制为

$$x(t_1) = 0, y(t_1) = b, \theta(t_1) = 2\pi - \arccos \left[\frac{W_1}{W_2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(1 - \frac{a}{R_1} \right) \right] + \alpha_0,$$

$$\bar{u} = -1, \bar{v} = -1.$$

下界栅的终端状态及最优控制为

$$x(t_1) = 0, y(t_1) = -b, \theta(t_1) = 2\pi - \arccos \left[\frac{W_1}{W_2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(1 + \frac{a}{R_1} \right) \right] - \alpha_0,$$

$$\bar{u} = 1, \bar{v} = 1.$$

其中

$$\alpha_0 = \arctg \frac{a}{b}.$$

应用倒转时间的概念, 对倒转时间方程积分, 可得到解的一般表达式如下:

$$\begin{aligned} x(\tau) = & x^0 \cos \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) + y^0 \sin \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) + \frac{R_1}{u} \left[1 - \cos \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) \right] \\ & + \frac{R_2}{v} \left[\cos \left(\theta^0 + \frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) - \cos \left(\theta^0 + \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} - \frac{W_2}{R_2} \bar{v} \right) \tau \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y(\tau) = & y^0 \cos \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) - x^0 \sin \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) + \frac{R_1}{u} \sin \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) \\ & - \frac{R_2}{v} \left[\sin \left(\theta^0 + \frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) - \sin \left(\theta^0 + \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} - \frac{W_2}{R_2} \bar{v} \right) \tau \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\theta(\tau) = \theta^0 + \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} - \frac{W_2}{R_2} \bar{v} \right) \tau. \quad (10)$$

其中 $\tau = t_1 - t$.

今给定如下一组参数: $W_1 = 15$ 哩/小时, $R_1 = 1768$ 米, $W_2 = 20$ 哩/小时, $R_2 = 3540$ 米, $a = 468$ 米, $b = 155$ 米. 通过数值计算, 就可求出界栅的图形 (见图 4.5).

由于上界栅不封闭, 我们将用有限时间局部捕捉区的概念做进一步的分析. 为此, 需要求出时间最优轨线.

四、最 优 轨 线

这里最优轨线系指“时间最优”, 即: P 要使发生碰撞的时间最短, E 则要使发生

碰撞的时间最长。

1. 目标集边界光滑点处的最优轨线

由对称性, 这里仅考虑到达边界 $\widehat{ADB}$ 的最优轨线 (见图1)。将边界 $\widehat{ADB}$ 的点用参数 S 来表示, S 为过 $\varphi_1(x, y) = 0$ 的圆心的铅垂线与半径之间的夹角, 顺时针方向为正。于是, 到达 $\widehat{ADB}$ 上光滑点处最优轨线的终端条件为

$$x(t_1) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin S - a, \quad y(t_1) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos S,$$

$$\theta(t_1) = 2\pi - \arccos \left[\frac{W_1}{W_2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(1 - \frac{a}{R_1} \right) \right] + \alpha_0,$$

$$\lambda_1(t_1) = -\sin S, \quad \lambda_2(t_1) = -\cos S, \quad \lambda_3(t_1) = 0.$$

由定量极值原理, 可得到最优控制如下:

$$\bar{u} = \begin{cases} -1, & \text{当 } S_0 < S \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{当 } \frac{\pi}{2} < S < \pi - S_0, \end{cases} \quad \bar{v} = -1.$$

其中 $S_0 \leq S \leq \pi - S_0$, $S_0 = \arctg \frac{a}{b}$.

当 $S = \pi - S_0$ 时对应 A 点, 这是一尖点, 下面专门进行讨论。

2. 尖点处的最优轨线

为了求尖点处的最优轨线, 我们先把文[2]的“集合覆盖法”推广到以时间为指标的定量微分对策, 有如下定理:

定理 设 $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = 0$ 为 R^n 中的光滑超曲面, $\{\phi_1(x) \leq 0\} \cap \{\phi_2(x) \leq 0\}$ 是目标集。对于尖点 $\{\phi_1(x) = 0\} \cap \{\phi_2(x) = 0\}$, 如果 $\bar{x}(t_1) \in \{\phi_1(x) = 0\} \cap \{\phi_2(x) = 0\}$, $x_u^-(t_1) \in \{\phi_1(x) < 0\} \cup \{\phi_2(x) < 0\}$, $x_v^-(t_1) \in \{\phi_1(x) \leq 0\} \cap \{\phi_2(x) \leq 0\}$, 则 $(\bar{u}, \bar{v})$ 满足“定量极值原理”, 且伴随方程的终端条件为

$$\lambda(t_1) = - \sum_{p=1}^2 \mu_p \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \Big|_{t_1}. \quad (11)$$

其中 $x \in R^n$, $u \in U$, $v \in V$, U , V 是 R^r 和 R^r 中的有界闭集; $\bar{x}$, x_u^- , x_v^- 分别是对应

$(\bar{u}, \bar{v})$, $(\bar{u}, v)$, $(u, \bar{v})$ 的轨线; $\mu_p \geq 0$ 是乘子。

证明可仿照文[5]中关于以时间为指标的定量极值原理的证法进行, 此处从略。此定理还可推广到覆盖集合多于两个的情形。

今将定理的结论用于这里的问题, 得到尖点处伴随方程的终端条件为

$$\lambda_1(t_1) = 2a(\mu_2 - \mu_1), \lambda_2(t_1) = 2b(\mu_1 + \mu_2), \lambda_3(t_1) = 0. \quad (12)$$

其中 μ_1, μ_2 是不同时等于零的非负乘子。

引进参数 α , α 为 y 轴正半轴与终端伴随向量之间的夹角, 顺时针为正。于是, (12) 变为

$$\lambda_1(t_1) = \sin \alpha, \lambda_2(t_1) = \cos \alpha, \lambda_3(t_1) = 0. \quad (13)$$

其中 $-\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0, \alpha_0 = \arctg \frac{a}{b}$ 。

由对称性, 下面仅考虑 $-\alpha_0 \leq \alpha \leq 0$ 的情形。根据定量极值原理, 可求出最优控制为

$$\bar{v} = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\alpha_0 \leq \alpha < \theta(t_1) - 2\pi; \\ 1, & \text{当 } \theta(t_1) - 2\pi < \alpha \leq 0; \end{cases} \quad \bar{u} = 1, \text{ 当 } -\alpha_0 \leq \alpha < 0. \quad (14)$$

当 $\alpha = \theta(t_1) - 2\pi$ 或 $\alpha = 0$ 时, 将出现奇异现象, 下面将详细讨论。

3. 奇异曲线

此处将对尖点处出现的 v —泛曲线、 u —泛曲线^[8]及“半开关曲线”进行详细讨论。后者是在以前文献中没有出现过的新型奇异曲线。

当 $\alpha = \theta(t_1) - 2\pi$ 时, P 方的最优控制已无法从定量极值原理得到, 即出现奇异现象。此时有 v —泛曲线^[8]。

今验证 v —泛曲线的存在, 并求出对应的 v 值及 v —泛曲线的表达式。

根据[6], 若存在 v —泛曲线, 则在此泛曲线上有如下条件成立:

$$\frac{\partial H}{\partial v} \equiv 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial v} \right) \equiv 0. \quad (15)$$

从上面第二式出发, 可求出奇异控制如下:

$$\hat{v} \equiv 0. \quad (16)$$

在 $\hat{v} \equiv 0$ 的条件下, 对倒转时间方程积分, 便得到 v —泛曲线的表达式如下:

$$x(\tau) = x^0 \cos \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) + y^0 \sin \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) + \frac{R_1}{u} \left[1 - \cos \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) \right] - W_2 \tau \sin \left(\theta^0 + \frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) \quad (17)$$

$$y(\tau) = y^0 \cos \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) - x^0 \sin \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) + \frac{R_1}{u} \sin \left(\frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right) - W_2 \tau \cos \left(\theta^0 + \frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau \right), \quad (18)$$

$$\theta(\tau) = \theta^0 + \frac{W_1}{R_1} \bar{u} \tau. \quad (19)$$

其中 $x^0 = 0, y^0 = -b, \theta^0 = 2\pi - \arccos \left[\frac{W_1}{W_2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(1 - \frac{a}{R_1} \right) \right] - \alpha_0$ 。

还可验证 $\hat{v}$ 满足奇异最优控制的必要条件, 即广义 Legendre—Clebsch 条件^[6,7],

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{2k} \frac{\partial H}{\partial v} \right] \leq 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

现在, 讨论另一奇异现象。

当 $\alpha=0$ 时, E 方的控制已无法从定量极值原理得到。此时将有 u —泛曲线。与上面做法类似, 可求出该泛曲线上的奇异控制为

$$\hat{u} \equiv 0. \quad (21)$$

此时, 在 $\hat{u} \equiv 0$ 条件下, 对倒转时方程积分, 就得到 u —泛曲线的表达式如下:

$$x(\tau) = \frac{R_2}{v} \left[\cos \theta^0 - \cos \left(\theta^0 - \frac{W_2}{R_2} \overline{v} \tau \right) \right] + x^0, \quad (22)$$

$$y(\tau) = \frac{R_2}{v} \left[\sin \left(\theta^0 - \frac{W_2}{R_2} \overline{v} \tau \right) - \sin \theta^0 \right] + W_1 \tau + y^0, \quad (23)$$

$$\theta(\tau) = \theta^0 - \frac{W_2}{R_2} \overline{v} \tau, \quad (24)$$

其中 $x^0=0$, $y^0=-b$, $\theta^0=2\pi - \arccos \left[\frac{W_1}{W_2} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(1 - \frac{a}{R_1} \right) \right] + \alpha_0$ 。

可以验证这里的 $\hat{u}$ 满足如下的 L—C 条件:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{2k} \frac{\partial H}{\partial u} \right] \geq 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

到此, 我们已求出了到达目标集边界的最优轨线, 其分布见图 2 和图 3 (以下各图中坐标单位长代表 50 米)。

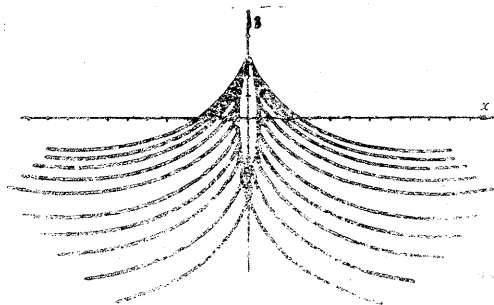


图 2

从全部最优轨线的分布中, 可看到另一种新性质的特殊轨线 L_1 (图 3)。在 L_1 的邻近, L_1 一侧的轨线 L_2 都流向 L_1 , 另一侧则不然。故 L_1 对其一侧的轨线起开关曲线的作用。因此 L_1 又可称为“半开关(semitransition)曲线”。

用文[2]中的方法进行分析,可知,对于某一终端向量,轨线始终不换轨,从而产生 L_1 ; 而对另一终端向量,轨线经过一段时间后发生换轨现象,而且终端向量不同,换轨点也不同. 这样,就产生了轨线族 L_2 . 所以,尖点处终端伴随向量不唯一是产生半开关曲线的根本原因.

此外,用文[2]中的方法还可以对此处的开关规律做出很好的解释. 此处不再赘述.

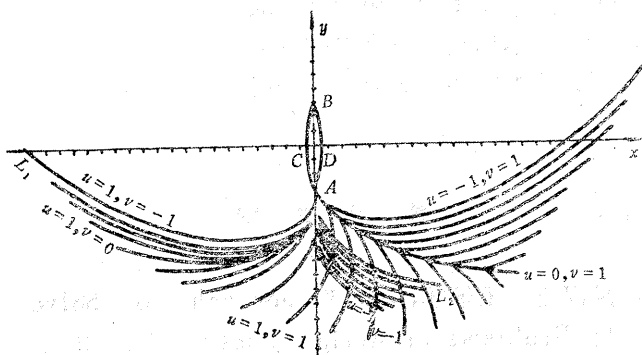


图 3

五、碰撞危险区和局部危险区

前面已经求出了上、下界栅,以及对应上界栅的时间最优轨线. 利用这些结果,就可以得到 E 方的碰撞危险区和有限时间局部危险区.

1. 碰撞危险区

对于迎面碰撞,下界栅如图 4 所示. 从中看到,下界栅的左、右两枝相交,把状态平面划分成两个区域. 包含目标集的那个区域就是 E 方碰撞危险区,界栅以外的区域是 E 方的安全区,而下界栅则是迎面发生碰撞的临界线. 界栅上的最优控制就是 E 方的躲避策略.

2. 有限时间局部危险区

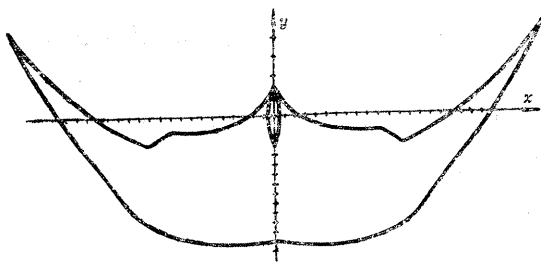


图 5

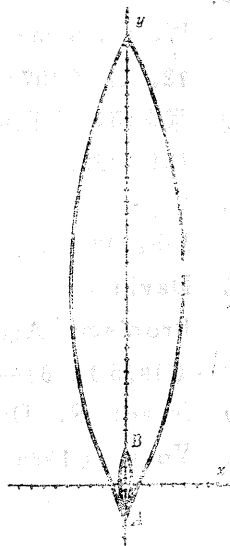


图 4

对于尾追碰撞,也求出了上界栅,然而它们不相交也不延伸到无穷远,因而不能把状态平面划分成如上所述的那种危险区和安全区。为此,我们把文[1]中的有限时间局部捕捉区的概念用到这里,构造出 E 方的有限时间局部危险区。此处,有限时间取为180秒,得到如图5所示的区域。

E 方的这种局部危险区不仅提供了危险区的范围,还指出了一旦 P 进入这种危险区,将要发生碰撞的最长时间是多少。由于这种危险区与时间有关,所以,可根据实际需要,选取适当的时间值,求出更合乎需要的有限时间局部危险区。

综上所述,本文所采用的方法是有效的,所得到的结果对于避免碰撞是有实际意义的。

参 考 文 献

- [1] 张嗣瀛、吴汉生、王景才, An Approach to Solve the Role Ambiguity Problems in Aerial Combat, 第九届国际自动控制联合会(IFAC)会议论文, Preprints, 5, (1984), 160—165.
- [2] 张嗣瀛, 一种确定控制系统伴随方程边界条件的方法——集合覆盖法, 自动化学报, 11, 3, (1985), 234—241.
- [3] Vincent, T. L., Collision Avoidance at Sea, Lecture Note in Control and Information Science: Differential Games and Applications, Proceedings of Workshop Enschede, (1977), 205—221.
- [4] Vincent, T. L., Cliff, E. M., Grantham, W. J. and Peng, W. Y., Some Aspects of Collision Avoidance, AIAA Journal, 12, 1, (1974), 3—4.
- [5] 张嗣瀛, 关于定量与定性微分对策, 自动化学报, 6, 2, (1980), 121—129.
- [6] Bryson, A. E. and Ho, Y. C., Applied Optimal Control, John Wiley and Sons, (1975), Chapter 8.
- [7] David, J. B. and David, H. J., Singular Optimal Control Problems, Academic Press, London; New York; San Francisco, (1975), 61—69.
- [8] Isaacs, R., Differential Games, John Wiley and Sons, New York, (1965), 156—199.

A PROBLEM OF COLLISION AVOIDANCE BETWEEN SHIPS

Hu Ning, Zhang Siying

(Northeast Institute of Technology, Shenyang)

Abstract

In this paper, based on the theory of qualitative and quantitative differential games, the problem of collision avoidance between two ships is considered. By using the concept of "partial capture region on finite time interval" in [1] and "set covering method" in [2], a new kind of singular curve, semitransition curve, is found and thereby the danger and partial danger regions are constructed. In addition, a solution is given for the problem where the slower ship is an evader. This case was not solved in [3]. The obtained results show that the method used in this paper is effective and the above two regions are meaningful for practical use.