第4卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol. 4, No.4
1987年12月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1987

关于无限时间状态估计问题

马　进

（复旦大学，上海）

摘　要

本文讨论无限持续时间线性无偏最小方差估计问题，研究无限时间最优估计器与通常的有限时间线性无偏最小方差估计器及其极限形式估计器之间，以及与奇异情形下的无限时间次优估计器之间的种种关系。

一、引言与预备

在线性无偏最小方差估计问题中，一个熟知的提法是初始时间 $t_0=-\infty$，即所谓"无限持续时间状态估计问题"．然而，通常所见的无限时间估计器，实质上只是由有限时间（或称"局部"）估计器的系数极限构成的形式估计器，它并未解答以下问题：第一，这种形式估计器是否仍是最小方差估计？第二，作为一族随机变量的局部估计器在什么概率意义下收敛于极限估计器？本文的主要目的就是证明极限形式估计器的最优性及局部估计器的均方收敛性。

设 (Ω, F, P) 是一个完备概率空间．本文将采用文献[1]中随机过程的定义，即若不加说明，总设时间参数集为 $(-\infty, \infty)$，设 $w=(w(t))_{-\infty}^{\infty}$ 是一个d维连续独立增量过程（I.I.P.），具有零均值，且对 $t>s>-\infty$，$w(t)-w(s)\sim N(0,\hat{R}(t,s))$，其中 $\hat{R}(t,s)$是$d\times d$非负定矩阵函数．特别地，若 $\exists R(\cdot)\geq 0$，且$R(\cdot)\in L_1^{loc}(-\infty,\infty;\ \mathbf{R}^{d\times d})$，使得$\hat{R}(t,s)=\int_s^t R(u)du$，则称$w$为正则的．当$R(\cdot)\equiv R\geq 0$时，$w$亦称为Wiener过程．文献[1]—CHⅨ－§2，§5给出了基于这样的I.I.P.的随机积分的定义及基本性质。

对于线性随机微分方程：

$$dx(t)=Ax(t)dt+dw(t), \tag{1.1}$$

其中x为n维过程；A为$n\times n$矩阵；w为n维正则I.I.P.，$\hat{R}(t,s)=\int_s^t R(u)du$；并设 $F_t=\sigma_t(w)\triangleq\sigma\{w(s)\,|\,s\leq t\}$，$t\in(-\infty,\infty)$．如果 F_t—适应的 n 维连续过程 $x=(x(t))_{-\infty}^{\infty}$ 对于任何$t_0>-\infty$都是方程(1.1)在$t\geq t_0$上以$x(t_0)$为初值的常义下的解，就称 x 为方程(1.1)在$(-\infty,\infty)$上定义的解．我们将集中讨论那些在$(-\infty,\infty)$上定义，且对于任何

本文于1986年10月11日收到．1987年2月5日收到修改稿．

$T>-\infty$，$\exists N(T)>0$，使得$\forall t\in(-\infty,T)$，$E[x(t)x(t)^T]\leq N(T)\cdot I$的解．我们称这样的解具有半一致有界方差．可以证明，在适当的条件下，例如：当A的特征值具有负实部；$R(t)\equiv R\geq 0$时，方程(1.1)在$(-\infty,\infty)$上定义且具有半一致有界方差的解存在并具有唯一形式：$x(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}dw(s)$．

二、问题的提法及主要定理

设系统的状态方程及观测方程为

$$dx(t)=Ax(t)dt+dw(t), \tag{2.1}$$

$$dy(t)=Cx(t)dt+dv(t), \tag{2.2}$$

其中x为n维；y为p维．我们作如下基本假设：(i)A的特征值均具有负实部；(ii)w，v是两个相互独立的正则I.I.P.，$\hat{R}^w(t,s)=\int_s^t R_1(u)du$，$\hat{R}^v(t,s)=\int_s^t R_2(u)du$（为简单起见，我们假设$R_1(\cdot)\equiv R_1\geq 0$；$R_2(\cdot)\equiv R_2>0$)；(iii)$[A,C]$完全能观．令$F_t=\sigma_t(w,v)$，$t\in(-\infty,\infty)$，记：

$$U_{ad}^e=\left\{u=(u(t))_{-\infty}^{\infty}\;\middle|\;\begin{array}{l}u(\cdot)\text{在}(-\infty,\infty)\text{上Lebesgue可测，且对}t_1>-\infty\\ R_2^{1/2}(\cdot)\,u(\cdot)\in L_2(-\infty,t_1;\mathbf{R}^p)\end{array}\right\}.$$

设$x=(x(t))_{-\infty}^{\infty}$是方程(1.1)在$(-\infty,\infty)$上定义且具有半一致有界方差的解．对于$a\in\mathbf{R}^n$，$t_1>-\infty$，设$a^Tx(t_1)$的估计器具有形式：

$$a^T\hat{x}(t_1)=-\int_{-\infty}^{t_1}u^T(t)\,dy(t)\triangleq-\int_{-\infty}^{t_1}u^T(t)\,dv(t)-\int_{-\infty}^{t_1}u^T(t)Cx(t)dt, \tag{2.3}$$

其中$u\in U_{ad}^e$（我们不排除第二个积分发散），判别准则取为

$$J^e(u,t_1,a)=E[a^Tx(t_1)-a^T\hat{x}(t_1)]^2=\min_{u\in U_{ad}^e}. \tag{2.4}$$

定理2.1(对偶定理) 在基本假设(i)—(iii)下，求解估计问题(2.1)，(2.2)，(2.4)等价于求解一个线性二次最优控制问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dz(t)}{dt}=-A^Tz(t)-C^Tu(t) & t\leq t_1,\\ z(t_1)=a,\end{cases} \tag{2.5}$$

$$J^c(u,t_1,a)=\int_{-\infty}^{t_1}[z^T(t)R_1z(t)+u^T(t)R_2u(t)]dt, \tag{2.6}$$

其中u在$U_{ad}^c(t_1,a)\triangleq\{u\in U_{ad}^e\mid J^c(u,t_1,a)<\infty\}$中取得．

证　设$t_0>-\infty$，$u\in U_{ad}^e$，令

$$S_u(t_0)=-\int_{t_0}^{t_1}u^T(t)dy(t)=-\int_{t_0}^{t_1}u^T(t)Cx(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}u^T(t)dv(t),$$

则由（2.1），（2.5）的解$x(t)$，$z(t)$的具体形式及Itô公式可知：

$E[a^Tx(t_1)-S_u(t_0)]^2=z^T(t_0)Q(t_0)z(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}[z^T(t)R_1z(t)+u^T(t)R_2u(t)]dt$，其中$Q(t_0)\triangleq\int_{-\infty}^{t_0}e^{A(t_0-s)}R_1e^{A^T(t_0-s)}ds$。

由A的稳定性，易证对$u\in U_{ad}^e$，（2.5）的解$z(t)$必满足$\lim\limits_{t_0\to-\infty}z^T(t_0)Q(t_0)z(t_0)=0$。因此若取$u\in U_{ad}^c(t_1,a)\subset U_{ad}^e$，由Fatou引理：

$$J^e(u,t_1,a)=E[a^Tx(t_1)-a^T\hat{x}(t_1)]^2\leq\lim_{t_0\to-\infty}E[a^Tx(t_1)-S_u(t_0)]^2=J^c(u,t_1,a). \tag{2.7}$$

设$u^*\in U_{ad}^e$，且满足$J^e(u^*,t_1,a)=\min\limits_{u\in U_{ad}^e}J^e(u,t_1,a)$，则必有$\underset{t_0\to-\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,S_{u*}(t_0)=a^T\hat{x}^*(t_1)$，从而

$$+\infty>J^e(u^*,t_1,a)=\lim_{t_0\to\infty}E[a^Tx(t_1)-S_{u*}(t_0)]^2\geq J^c(u^*,t_1,a),$$

此即$u^*\in U_{ad}^c(t_1,a)$，由（2.7），就得$J^e(u^*,t_1,a)=J^c(u^*,t_1,a)$。

今设$u^{**}\in U_{ad}^e$，且使得$J^c(u^{**},t_1,a)=\min\limits_{u\in U_{ad}^e}J^c(u,t_1,a)$，则必有$u^{**}\in U_{ad}^c(t_1,a)$，且由（2.7）知$J^e(u^{**},t_1,a)\leq J^c(u^{**},t_1,a)$，故

$$J^e(u^*,t_1,a)=J^c(u^*,t_1,a)\geq J^c(u^{**},t_1,a)\geq J^e(u^{**},t_1,a).$$

由u^*的定义，以上不等式均应为等式。但A稳定，故控制问题（2.5），（2.6）具有唯一最优解，因此$u^*=u^{**}$。证毕。

由定理2.1易见，我们实际上已经证明了常用的形式估计器就是无限时间最优估计器，从而证明了它的最优性。

对任意的$t_0>-\infty$，已知在$[t_0,t_1]$上$a^Tx(t_1)$的最优估计为$a^T\hat{x}_{t_0}^*(t_1)=$

$-\int_{t_0}^{t_1} u_{t_0}^T(t)\,dy(t)$，其中$u_{t_0}(t)=-R_2^{-1}CP'_{t_0}(t)S'_{t_0}(t,t_1)a$，而$P'_{t_0}$是矩阵Riccati方程

$$\frac{dP}{dt}=AP+PA^T+R_1-PC^TR_2^{-1}CP \tag{2.8}$$

满足$P'_{t_0}(t_0)=Q(t_0)$，在$t\geq t_0$上的正定解；$S'_{t_0}(t,t_1)$则是摄动方程：

$$\begin{cases} S'_{t_0}(t,t_1)=e^{-A(t_1-t)}+\int_t^{t_1} e^{-A(t-u)}C^TR_2^{-1}CP'_{t_0}(u)S'_{t_0}(u,t_1)du, \\ S'_{t_0}(t_1,t_1)=I \end{cases} \tag{2.9}$$

的解（参看文献〔2〕，〔3〕）。设对 $a\in\mathbf{R}^n$，$t_1>-\infty$，无限时间最优估计器为

$a^T\hat{x}^*(t_1)=-\int_{-\infty}^{t_1}\bar{u}^T(t)dy(t)$，$\bar{u}\in U_{ad}^e$，则我们有：

定理 2.2 $\underset{t_0\to-\infty}{\text{l.i.m.}}\ a^T\hat{x}_{t_0}^*(t_1)=a^T\hat{x}^*(t_1)$.

注 此结论可推广到R_1，R_2为满足一定条件的一般矩阵函数$R_1(\cdot)\geq0$，$R_2(\cdot)>0$的情形，在此我们不作详细讨论。

我们将定理2.2的证明分成两个引理。若记$P_{t_0}(\cdot)$，$P_\infty(\cdot)$分别是(2.8)以$P_{t_0}(t_0)=0$，及$P_\infty(t_0)=\lim\limits_{n\to\infty}P_{t_n}(t_0)$为初值，在$t\geq t_0$上的解，这里$\{t_n\}$是任一实序列，$t_n\leq t_1$，$t_n\downarrow-\infty$；$P_{t_n}(t_n)=0$。则有

引理 2.1 $\forall s\in(-\infty,t_1]$，$\lim\limits_{t_0\to\infty}P'_{t_0}(s)=P_\infty(s)=\lim\limits_{t_0\to-\infty}P_{t_0}(s)$.

证　后一等式可见文献〔3〕，仅证前一等式。

设$t_0>-\infty$，$\forall s\in[t_0,t_1]$，在$[t_0,s]$上考虑系统（2.5）及判据

$$J_{t_0}^c(u,s,a)=z^T(t_0)Q(t_0)z(t_0)+\int_{t_0}^s[z^T(t)R_1z(t)+u^T(t)R_2u(t)]dt.$$

熟知，当取$\tilde{u}(t)=-R_2^{-1}CP'_{t_0}(t)\tilde{z}(t)$，（$\tilde{z}(t)$是(2.5)相应于$\tilde{u}$的解），$t\in[t_0,s]$时，

就有$a^TP'_{t_0}(s)a=J_{t_0}^c(\tilde{u},s,a)$。设$u^0$是上述系统及判据

$$J_{t_0}^{c,0}(u,s,a)=\int_{t_0}^s[z^T(t)R_1z(t)+u^T(t)R_2u(t)]dt$$

的最优解，则 $a^TP_{t_0}(s)a=J^{c,0}_{t_0}(u^0,s,a)$。因此易见

$$a^TP_{t_0}(s)a\le J^{c,0}_{t_0}(\tilde{u},s,a)\le J^c_{t_0}(\tilde{u},s,a)\le J^c_{t_0}(\bar{u},s,a), \tag{2.10}$$

其中 $\bar{u}(t)=-R_2^{-1}Cp_\infty(t)\bar{z}(t)$，$\bar{z}(t)=S_\infty(t,s)a$，($S_\infty$ 是(2.9)以 $P_\infty(t)$ 代替 $P'_{t_0}(t)$ 后得到的解）。易证在我们的条件下，$\lim\limits_{t_0\to-\infty}\bar{z}^T(t_0)Q(t_0)\bar{z}(t_0)=0$，从而 $\lim\limits_{t_0\to-\infty}J^c_{t_0}(\bar{u},s,a)=J^c(\bar{u},s,a)=a^TP_\infty(s)a$。证毕。

对于引理2.1中出现的$\{t_n\}$，记$F_n\triangleq\sigma\{y(t)-y(t_n);\ t_n\le t\le t_1\}$，$F_\infty\triangleq\sigma(\bigcup\limits_n F_n)$，则$\{F_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个单调增加的 $\sigma-$域族，熟知在有限时间区间$[t_n,t_1]$上，局部最优估计器 $\hat{x}^*_{t_n}(t_1)=E[x(t_1)|F_n]$，且若我们对$a\in\mathbf{R}^n$，定义 F_n-鞅$M(n)=a^T\hat{x}^*_{t_n}(t_1)$，则由鞅收敛定理易知$M(n)\xrightarrow[L_2(\Omega)]{L(\Omega)}M(\infty)\triangleq a^TE[x(t_1)\,|\,F_\infty]$，$(n\to\infty)$。因此以下引理隐含了定理2.2。

引理2.2 $\hat{x}^*(t_1)=E[x(t_1)|F_\infty]$。

证　首先我们指出，在本文的基本假设下，可以证明：$\forall\, a\in\mathbf{R}^n$，$a^T\hat{x}^*(t_1)$ 是 $F_\infty-$可测的随机变量。从而对上述$\{t_n\}$，有

$$\begin{aligned}&E[a^Tx(t_1)-a^TE[x(t_1)|F_\infty]]^2-E[a^Tx(t_1)-a^TE[x(t_1)|F_n]]^2\\&=E\{a^TE[x(t_1)|F_n]-a^TE[x(t_1)|F_\infty]\}^2\to0,\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

另一方面，由对偶定理及引理2.1，

$$\lim_{n\to\infty}E[a^Tx(t_1)-a^TE[x(t_1)|F_n]]^2=\lim_{n\to\infty}E[a^Tx(t_1)-a^T\hat{x}^*_{t_n}(t_1)]^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}a^TP'_{t_n}(t_1)a=a^TP_\infty a=E[a^Tx(t_1)-a^T\hat{x}^*(t_1)]^2,$$

从而，$E\{a^T\hat{x}^*(t_1)-a^TE[x(t_1)|F_\infty]\}^2=E[a^Tx(t_1)-a^TE[x(t_1)|F_\infty]]^2-E[a^Tx(t_1)-a^T\hat{x}^*(t_1)]^2=0$。证毕。

三、奇异情形的讨论

奇异情形是指上节基本假设（ii）中 $R_2 \geq 0$ 减弱为 $R_2 > 0$．这时最优估计可能不存在，但可讨论次优估计．由于篇幅所限，我们略去所有证明．以下仍假定基本假设（i），（iii）成立．

定义3.1 称 $\{\hat{x}_\varepsilon(t_1)\}_{\varepsilon>0}$ 是 $x(t_1)$ 的一个无限时间次优估计，如果它是一族形如 $\int_{-\infty}^{t_1} U(t)dy(t)$ 的线性无偏估计，且 $\forall a \in \mathbf{R}^n$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} E[a^T x(t_1) - a^T \hat{x}_\varepsilon(t_1)]^2 = \inf\limits_{\hat{x}\in F} E[a^T x(t_1) - a^T \hat{x}(t_1)]^2$，其中 F 表示所有形如 $\int_{-\infty}^{t_1} U(t)dy(t)$ 的估计器的集合．$U(\cdot)$ 是 $n\times p$ 矩阵函数．

可以证明：$\hat{x}_\varepsilon(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} U_\varepsilon^T(t,t_1)P_\varepsilon C^T(R_2+\varepsilon I)^{-1}dy(t)$，$(\varepsilon>0)$ 是按定义3.1的一个无限时间次优估计器，其中 $U_\varepsilon(t,t_1)$ 是方程

$$\frac{dz_\varepsilon(t)}{dt} = (-A^T + C^T(R_2+\varepsilon I)^{-1}CP_\varepsilon)z_\varepsilon(t)$$

的基本解矩阵；$P_\varepsilon \geq 0$ 满足代数Riccati方程：

$$AP_\varepsilon + P_\varepsilon A^T + R_1 - P_\varepsilon C^T(R_2+\varepsilon I)^{-1}CP_\varepsilon = 0.$$

定理3.1 $\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \hat{x}_\varepsilon(t_1) = E[x(t_1)|F_\infty]$．

此结论与有限时情形是有区别的，因为在一般奇异情况下，$\hat{x}^*(t_1)$ 与 $E[x(t_1)|F_\infty]$ 是否相等不得而知．但容易得到

推论3.1 若 $R_2>0$，则 $\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \hat{x}_\varepsilon(t_1) = \hat{x}^*(t_1)$，其中 $\hat{x}^*(t_1)$ 同上节．

最后，我们指出：在一定条件下，即使是在奇异情形，我们也可以通过与文献[4]类似的降维手法及常微分方程的定性理论获得一类降维的最优估计器，它的形式的极端情况就是无限时间最优估计器或[4]中降维估计器的极限形式．

致谢 本文在完成和修改过程中得到李训经教授的热情指导，并得到陈翰馥研究员的有益指点，在此谨表示衷心感谢！

参考文献

〔1〕 Doob, J. L., Stochastic Processes, New York, John-Wiley & Sons Inc., (1953).

〔2〕 Åström, K.J., Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, (1970).

〔3〕 Gibson, J. S., The Riccati Integral Equations, SIAM. J. Contr. & Opti., 17, (1979), 537-565.

〔4〕 许可康，含有不确定因素的一类降维状态估计，数学年刊，1, 1, (1980), 41—45.

ON THE STATE ESTIMATION WITH INFINITE DURATION

Ma Jin

(Fudan University, Shanghai)

Abstract

This paper treats the problem of Linear Unbias Least Square Estimation with infinite duration. Some relations among the optimal estimator with infinite duration, the usual finite duration estimator and its limit form estimator, the suboptimal estimator with infinite duration and the desending dimensional optimal estimator in degenerate case are investigated. The optimality of the usual limit estimator and the mean square convergence of the family of the "local estimators" are proved.