卷第1期
1988年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.1
March, 1988

用局部状态反馈的分散化镇定

伍乃骐　李人厚　胡保生

（西安交通大学系统工程研究所）

摘　要

本文考虑一般关联大系统的分散镇定问题。通过调节系统的二次型目标函数，我们推导出一种系统的用局部状态反馈的分散镇定方法。这种方法基于子系统模型求解，简单、有效。并用一个数字例子验证了这一方法。

一、引　言

系统的镇定是分散控制系统中的一个重要而又突出的问题。从镇定方法来看有下列两类：一是以整体模型来考虑分散化镇定；二是各子系统分别镇定，同时保证整个系统的稳定性。由于后者计算量小，可以处理大规模系统，且其闭环系统可靠性较高、抗结构干扰性较好，所以颇引起人们的注意。文献〔1〕、〔2〕讨论了这类方法，但到目前为止，文献中绝大多数只讨论那些具有某些特殊关联结构的系统的分散镇定[1],[2]。而实际上有许多不具有这样的关联结构的系统仍能用这类方法镇定。〔3〕中虽没有限制系统的关联结构，但却没有给出镇定的方法，只给出了对已有的设计的判稳方法。

本文考虑同样的问题，但不要求系统具有特殊的关联结构。各个子系统都按各自的二次目标函数进行优化设计而镇定，而通过调节目标函数使得如此求得的分散控制能镇定整个系统。从而给出了一个系统的分散镇定的方法。

二、问　题　的　描　述

考虑下列的关联系统

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j\neq i}^{m} A_{ij} x_j + B_i u_i,\ y_i = C_i x_i,\ (i=1,\cdots,m). \tag{1}$$

令

$$\begin{cases} A = \text{block diag}(A_1,\cdots,A_m),\ B = \text{block diag}(B_1,\cdots,B_m), \\ C = \text{block diag}(C_1,\cdots,C_m), \\ H = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2}$$

本文于1987年2月6日收到，1987年11月3日收到修改稿。

则系统（1）可写成下列紧凑的形式。

$$\dot{x}=(A+H)x+Bu, \tag{3}$$

式中 A、B、C 和 H 均为相应维数的常数矩阵。并且我们设系统（1）是联合可控可观的，各去耦子系统（C_i,A_i,B_i）也是可控可观的。

局部状态反馈的分散控制就是将控制器限制为下列的结构

$$u_i=-F_ix_i,\quad (i=1,2,\cdots,m)。 \tag{4}$$

由此而得的整个闭环系统为

$$\dot{x}=(A+H-BF)x, \tag{5}$$

其中
$$F=\text{block diag}(F_1,F_2,\cdots,F_m)。 \tag{6}$$

现在的问题是如何设计控制器（4）使得（5）为渐近稳定。

设各子系统的性能指标为二次型，且由下式描述。

$$J_i=\frac{1}{2}\int_0^\infty(x_i'\ Q_ix_i+u_i'\ R_iu_i)dt,\qquad (i=1,2,\cdots,m), \tag{7}$$

其中 Q_i 和 R_i 均为正定矩阵。整个系统的目标函数为

$$J=\sum_i J_i=\frac{1}{2}\int_0^\infty(x'Qx+u'Ru)dt, \tag{8}$$

其中 $Q=\text{block diag}(Q_1,Q_2,\cdots,Q_m)$，$R=\text{block diag}(R_1,R_2,\cdots,R_m)$。

设 P 和 F 由下列的方程决定。

$$PA+A'P-PBR^{-1}B'P+Q=0,\quad F=R^{-1}B'P。 \tag{9}$$

注意到（9）中的矩阵 A、B、Q、R 均为块对角的，因此 P 和 F 亦然。即有 $P=\text{block diag}(P_1,P_2,\cdots,P_m)$和 F 满足（6），并且它们由下面的方程决定。

$$P_iA_i+A_i'\ P_i-P_iB_iR_i^{-1}\ B_i'P_i+Q_i=0\ ,\quad F_i=R_i^{-1}\ B_i'P_i。 \tag{10}$$

也就是说，P_i 和 F_i 可通过求解各去耦子系统的 Riccati 方程而求得。不过由（10）求得的解并不能保证整个系统的渐近稳定（各子系统的稳定性已得到保证）。

选择 $v(x)=x'Px$ 为系统（5）的一个 Lyapunov 函数，则我们有

$$\begin{aligned}\dot{v}(x)&=\dot{x}'Px+x'P\dot{x}=x'(A+H-BF)'Px+x'P(A+H-BF)x\\&=x'[(A+H-BF)'P+P(A+H-BF)]x\\&=x'(A'P+PA-PBR^{-1}P+H'P+PH-PB'R^{-1}B'P)x\\&=x'(H'P+PH-Q-PBR^{-1}B'P)x=x'Gx,\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $G=H'P+PH-Q-PBR^{-1}B'P$。注意到矩阵 G 的实对称性质，我们有下列稳定性定理。

定理 1 如果式（11）中的矩阵 G 为负定的，那么由（10）式所决定的分散控制器镇定系统（1）。

证 如果 G 为负定，则对于任意的 $x\in R^n$ 恒有 $x'Gx<0$，即 $\dot{v}(x)<0$，于是由 Lyapunov 定理知系统（5）渐近稳定。

进一步，由对称矩阵的负定特性，我们还有下面的结论。

定理 2 如果（11）中的矩阵 G 的最大特征值小于零，即有 $\lambda_{\max}(G)<0$，那么由（10）式决定的分散控制器镇定系统（1）。

证 由于 G 的实对称性，故其所有特征值均为实数，因此最大特征值有意义。且有矩阵 G 负定 $\Longleftrightarrow$ 矩阵 G 的所有特征值均小于零，即对任意的 $\lambda\in\sigma(G)$，$\lambda<0\Longleftrightarrow\lambda_{\max}(G)<0$，即定理的结论成立。

定理 2 给出了稳定性判据，并且告诉我们，如果我们能构造出一种算法，使得 $\lambda_{\max}(G)$ 能够不断的减小直至变为负的，那么我们就能找到一个镇定的方法。

三、镇 定 方 法

考察矩阵 G，我们知矩阵 G 是矩阵 P、Q 和 R 的函数，并且 P、Q、R 直接影响控制器的参数。但 P 是 Q、R 的函数，因此 G 只是 Q 和 R 的函数，Q、R 的变化必然影响 $\lambda_{\max}(G)$ 的变化。这样我们可通过调节 Q、R（即调节目标函数）来达到镇定系统的目的。为简单起见，在下面的推导中我们固定 R 不变，而只调节 Q。下面我们就来推导出这样一种镇定的方法。

令 $Q_i=\alpha_i\widetilde{Q}_i$，$\widetilde{Q}_i>0,\alpha_i>0$，则 $Q=\text{block}\ \ \text{diag}(\alpha_1\widetilde{Q}_1,\alpha_2\widetilde{Q}_2,\cdots,\alpha_m Q_m)$，此时（10）式成为

$$P_iA_i+A_i'P_i-P_iB_iR_i^{-1}B_i'P_i+\alpha_i\widetilde{Q}_i=0,\quad F_i=R_i^{-1}B_i'P_i. \tag{12}$$

因此如果对于给定的初始 Q 使得 $\lambda_{\max}(G)\geq 0$ 时，那么我们只要调节 Q 使得 $\lambda_{\max}(G)$ 下降。这个可由解下面的优化问题来实现。

$$\min_{\alpha>0}\lambda_{\max}(G), \tag{13}$$

式中 α 为一个 m 维向量 $\alpha=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)'$。这样我们可选 $\widetilde{Q}$ 为一个常数阵，只调节 α 就行了。如果通过解问题（13）我们能求得 $\lambda_{\max}(G)<0$ 的解，那么我们就得了镇定系统（1）的分散控制器。而解问题（13）可用下降算法迭代完成（修改 α）。

$$\alpha^{k+1}=\alpha^k-\rho\frac{\partial\lambda_{\max}(G)}{\partial\alpha},\quad(\rho>0), \tag{14}$$

其中

$$\frac{\partial\lambda_{\max}(G)}{\partial\alpha}=\left(\frac{\partial\lambda_{\max}(G)}{\partial\alpha_1}\cdots\frac{\partial\lambda_{\max}(G)}{\partial\alpha_2}\right)'. \tag{15}$$

因此，要解问题（13）关键是要求出 $\dfrac{\partial\lambda_{\max}(G)}{\partial\alpha_i}(i=1,2,\cdots,m)$。

由[4]可知，如果 w'、v 分别为矩阵 G 相对于 $\lambda_{\max}(G)$ 的左右特征向量，那么我们有下列等式。

$$\frac{\partial \lambda_{\max}(G)}{\partial \alpha_i}=\frac{w'\dfrac{\partial (G)}{\partial \alpha_i}v}{w'v}. \tag{16}$$

而 $$\frac{\partial G}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}H+H'\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}-\widetilde{Q}_i-\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}BR^{-1}B'P-PBR^{-1}B'\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}. \tag{17}$$

注意到 P 的块对角特性，以及 P_i 由（12）式的子系统 Riccati 方程决定，我们知 P_i 只是 x_i 的函数，当 $i\neq j$ 时，P_i 与α_j 无关。于是有

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}=\text{block diag}\left(0,\cdots,0,\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i},0,\cdots,0\right). \tag{18}$$

由（17）和（18）知，要求得（16），关键是求$\dfrac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}$ $(i=1,\cdots,m)$. 在（15）式中相对于 P_i 对 α_i 求偏导，我们得

$$\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}A_i+A_i'\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}-\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}B_iR_i^{-1}B_i'P_i-P_iB_iR_i^{-1}B_i'\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}+\widetilde{Q}_i=0. \tag{19}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}(A_i-B_iR_i^{-1}B_i'P_i)+(A_i-B_iR_i^{-1}B_i'P_i)'\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}+Q_i=0. \tag{20}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}(A_i-B_iF_i)+(A_i-B_iF_i)'\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}+\widetilde{Q}_i=0. \tag{21}$$

（21）是去耦的子系统的闭环系统的 Lyapunov 方程，由此可求得$\dfrac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}$,结合(15)、（16）、（17）、（18）和（21），我们知解问题（13）是可行的。这样我们就可以按上面所推导的过程设计控制器。

四、关于算法的讨论

前面所给出的算法，设计计算在子系统中进行，计算简单、有效。由于矩阵 G 的实对称性，即使它的维数很高，求其最大特征值和相应的左右特征向量都没有困难。而且前一节的左右特征向量满足$w=v$,它们还是唯一的。这样,这一方法能处理大规模系统。

由（12）式知，各去耦的闭环子系统均为渐近稳定的，这就使得$\dfrac{\partial P_i}{\partial \alpha_i}$是（21）的唯一正定解，即它存在且唯一。再由 w 和 v 的存在和唯一性可推知$\dfrac{\partial \lambda_{\max}(G)}{\partial \alpha}$存在且唯一。这就保证了解问题(13)的迭代过程的下降性，即算法收敛，这样，如对给定的系

统存在集合 $\mathbf{A}\triangleq\{\alpha|$由 $Q_i=\alpha_i\widetilde{Q}_i$ 所求得的解使得 $\lambda_{\max}(G)<0\}$，则由该方法一定可求得一个 $\hat{\alpha}\in\mathbf{A}$。由此可知此算法和初始值的选择无关，但不同的初始值所求得的控制器参数不同。同时，如果在设计过程中发现 $\lambda_{\max}(G)\geq 0$，且不再下降，则说明该系统不能由此途径镇定。也就是说，这种算法在某种意义上也是判定系统的可镇定性的方法。

这种方法不要求系统具有特殊的关联结构，而对于〔1〕〔2〕中所讨论的特殊系统则一定能镇定。下面的定理说明了这一点。这说明本方法可以对更广泛的系统设计出稳定的控制器。

定理 3　如果系统（1）具有 $A_{ij}=B_iK_{ij}$ $(i\neq j)$ 的特殊的关联结构，则由本方法一定可以求得一个稳定解。其中 K_{ij} 是合适维数的常数矩阵。

证　我们可将关联写成整体的形式 $H=BK$。选 $v(x)=x'Px$ 为系统（5）的一个 Lyapunov 函数，我们有

$$\begin{aligned}\dot{v}(x)&=x'(K'B'P+PBK-Q-PBR^{-1}B'P)x\\&=x'(K'RK-Q)x-x'(K-R^{-1}B'P)'R(K-R^{-1}B'P)x,\end{aligned}\tag{22}$$

式中的后一项为半正定，只要（$K'RK-Q$）为负定那么系统（5）渐近稳定。对于固定的 R，如果 $\widetilde{Q}$ 为单位阵，则只要 $\min\limits_i\alpha_i>\lambda_{\max}(K'RK)$就行了。而 $K'RK$ 为实对称常阵，$\lambda_{\max}(K'RK)<\infty$，即集合 $\mathbf{A}$ 存在，用本文的方法可将其镇定。

用类似的方法可证明系统（1）具有 $A_{ij}=B_iE_{ij}C_j$ 的特殊关联结构时，本方法也能将其镇定。

为了尽量避免在子系统上进行设计的保守性，本方法没有对矩阵 G 的负定性用进一步的不等式关系来代替，保守性相对要小。同时，由于用下降算法调节 Q，使得目标函数中的权就镇定而言分布合理，进一步减小了保守性。这样作的结果是使得用本方法能够对更多的系统设计出稳定的控制器，同时保持在子系统上设计简单的特点，以及尽可能求得合适的控制增益，而不是过分增大各子系统的稳定度以镇定系统。

用本方法还可设计出具有预定稳定度的分散控制器，这只要在（12）中用$(A_i+\gamma I)$代替 A_i 就行了，这里 $\gamma>0$。

五、计　算　的　例　子

为了验证所给出的算法，我们对几个例子进行了仿真，得到了满意的结果。下面列出其中之一。

例　它具有三个子系统，其数学描述如下：

$$\dot{x}_1=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-3\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0.5&1\\1&0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}0.6&0\\0&1\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}u_1,$$

$$\dot{x}_2=\begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}0.5&1\\0&0.5\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1&0.5\\0&-0.5\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}u_2,$$

$$\dot{x}_3=\begin{pmatrix}0&1\\-3&-4\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1&0\\0&0.5\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1&1\\0.5&0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}u_3.$$

我们取 $R_1=R_3=I_1$，$R_2=I_2$，$\widetilde{Q}_1=\widetilde{Q}_2=\widetilde{Q}_3=I_2$。我们对不同的初始值进行了仿真，结果在设计过程中，$\lambda_{\max}(G)$ 总是下降的，最后都求得了稳定解。当初始值为 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.7$ 时，$\lambda_{\max}(G)=0.0046>0$，经过5次迭代得 $\lambda_{\max}(G)=-0.5749$，此时反馈增益为

$$F_1(1.0221\quad 0.2938),\quad F_2=\begin{pmatrix}1.0514 & 0.4197\\ 0.5596 & 2.1938\end{pmatrix},\quad F_3=(1.2196\quad 0.3326).$$

本例不具有特殊的关联结构，用目前已有的基于子系统进行设计的方法不能对其设计，而本方法求得了稳定解。所求得的反馈增益都不太高。

六、结 论

在分散控制中对各个子系统分别镇定，同时保证全系统的稳定性，这样做使复杂系统化简，也使系统具有好的抗结构干扰性，这是大系统控制所需要的，因此很具吸引力。而目前有的方法只适于具有特殊关联结构的一些系统，没有系统的设计方法。本文所给出的方法是一种系统的方法，并且不限制系统的关联结构，克服了现有方法的缺点。本方法在设计的同时还给出了可镇定性的信息，这是很有用的。因为对基于子系统的设计目前尚无方法判定其可镇定性。本方法还很容易推广到离散系统中去，也可用于分散的观测器的设计。

主要参考文献

〔1〕 Sezer, M. E. and O. Huseyin, Stabilization of Linear Time-invariant Interconnected Systems Using Local State Feedback, IEEE SMC-8, (1973), 751-756.

〔2〕 Geromel, J. C. and A. Yamakami, Stabilization of Continuous and Discrete Linear Systems Subjected to Control Structure Constraints, Int. J. Control, 36, (1982), 429-444.

〔3〕 Darwish, M., H. M. Soliman and J. Fantin, Decentralized Stabilization of Large-scale Dynamical Systems, IEEE SMC-9, (1979), 717-720.

〔4〕 NcBrinn, D. E. and R. J. Roy, Stabilization of Lianer Multivariable Systems by Output Feedback, IEEE AC-17, (1972), 243-245.

〔5〕 Singh, M. G., 分散控制，李人厚、胡保生译，国防工业出版社，北京，(1985).

Decentralized Stabilization Using Local State Feedback

Wu Naiqi, Li Renhou, Hu Baosheng

(Institute of Systems Engineering, Xian Jiaotong University)

Abstract

In this paper we consider the decentralized stabilization problem of large scale interconnected systems. By regulating the quadratic performance of the systems we develop an approach for decentralized stabilization using local state feedback. The controllers are designed based on the decoupled subsystems, it is simple and effective. An example is given to verify the approach.