第 卷第1期
1988年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.1
March, 1988

关于无穷区间上一类最佳反馈控制系统*

欧阳亮

（山东大学数学研究所，济南）

摘　　要

本文提出新的最佳控制问题：在允许集合$U=\{u=\alpha(t)x+\beta(t)x' \mid \forall\alpha(t)\in C[0,T], \forall\beta(t)\in C[0,T]\}$中求$u^*\in U$，在约束$x''+a(t)x=u$，$x(0)=x_0$，$x'(0)=x_1$之下指标$J(u)=\int_0^\infty x^2(t;x_0,x_1)dt=\min$，并证明两个定理，求出了最佳反馈控制$u^*$的表达式。

一、问题的提出

1974年，文献[1][2]介绍了Евтýшенко的最佳激发问题：求控制$u(t)\in U$，$U=\{u(t)\mid 0\le u(t)\le 1,\ u(t)\in L^\infty[0,t_1]\}$，使对某给定的常数$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，，在约束

$$\ddot{x}+(1-\varepsilon u)x=0,\quad 0<t<\infty,\quad x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=y_0,$$

之下满足$x^2(t_1)+[\dot{x}(t_1)]^2=1$，且$t_1[u]=\inf\limits_{u\in U} t_1[u]$。其物理意义是对于满足方程$\ddot{x}+s(t)x=0$的调和振子，在允许范围$1-\varepsilon\le s(t)\le 1$之内求一位势$s(t)$，使振子能量以最速时间$t_1$达到给定值（取为1）。本文考虑与调和振子能量极小有关的无穷区间上的最佳反馈控制问题，记为：

问题A　求反馈控制$u^*=\alpha^*(t)x+\beta^*(t)x'$属于允许控制类$U=\{u=\alpha(t)x+\beta(t)x'$，$\alpha(t)$与$\beta(t)$是$[0,\infty)$上任意连续函数$\}$，在下列约束之下：

$$x''(t)+a(t)x=\alpha(t)x+\beta(t)x',\quad 0\le t<\infty \tag{1}$$

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_1,\qquad x_0^2+x_1^2\ne 0 \tag{2}$$

指标$J=\int_0^\infty [x^*(t;x_0,x_1)]^2dt=\min\limits_{u\in U}\int_0^\infty [x(t;x_0,x_1)]^2dt$。　　(3)

这一问题将[3]结果一般化（$a(t)\ne$常数），对二阶振动系统的制振与消振有实际意义。

二、最佳反馈控制的表达式

采用文[4]中记号，对$[0,\infty]$上给定的方程：$x''(t)+p(t)x'+q(t)x=0$，如果它在

*此项研究系中国科学院科学基金资助课题。

本文于1985年5月13日收到。1986年8月4日收到修改稿。

$[0,\infty)$上所有的解均属 $L^2[0,\infty)$，就称它属 $L.C.$；如果它在$[0,\infty)$的一切解均为有界，就称它属 $L.S.$，故当方程(1)属 $L.C.$ 时，显然$0\le J<\infty$，当$a(t)\equiv 0$，$\beta(t)\equiv 0$方程(1)包含重要的特殊情形 $x''=\alpha(t)x$，当 $\alpha(t)\neq$常数，这种方程可属于 $L.C.\cap L.S.$，例如拟伯塞尔系统 $x''+t^m x=0$，$m\ge 3$，$0\le t<\infty$。

引理 1 假设方程(1)属$L.C.$，点(x_0,x_1)属二维有界闭区域 D，则由(1)、(2)决定的指标：

$$J(x_0,x_1)=\int_0^\infty [x(t;x_0,x_1)]^2dt\in C(D),\quad \frac{\partial J}{\partial x_0}\in C(D),\quad \frac{\partial J}{\partial x_1}\in C(D).$$

证 已设(1)属 $L.C.$，故积分$\int_0^\infty [x(t;x_0,x_1)]^2dt$ 当$(x_0,x_1)\in D$时为一致收敛，按始值问题(1)在任何有界区间$[0,T]$上的解对始值的连续性，函数 $J(x_0,x_1)\in C(D)$。再记

$$R(t;x_0,x_1)=\frac{\partial x(t;x_0,x_1)}{\partial x_1},\quad S(t;x_0,x_1)=\frac{\partial x(t;x_0,x_1)}{\partial x_1},$$

由方程(1)在任何有界区间上的解对始值的可微性，

$$R''+a(t)R=\alpha(t)R+\beta(t)R',\quad 0\le t\le T \tag{4}$$

$$R(0)=1,\quad R'(0)=0。 \tag{5}$$

$$S''+a(t)S=\alpha(t)S+\beta(t)S',\quad 0\le t\le T \tag{4$'$}$$

$$S(0)=0,\quad S'(0)=1. \tag{5$'$}$$

已设方程(1)属于 $L.C.$，故$\int_0^\infty R^2(t;1,0)dt<\infty$，$\int_0^\infty S^2(t;0,1)dt<\infty$将函数 $J(x_0,x_1)$对 x_0 进行积分号下微商，即得$\frac{\partial J}{\partial x_0}\approx 2\int_0^\infty [x(t;x_0,x_1)]R(t;1,0)dt$，由 Schwarz 不等式此式右边反常积分在 D 上一致收敛，由反常积分的积分号下微商定理可知$\frac{\partial J}{\partial x_0}\in(D)$，同理可证$\frac{\partial J}{\partial x_1}\in C(D)$。

现将(1)(2)转化为等价组：

$$x'=y,\quad 0\le t<\infty$$

$$y'=\alpha(t)x+\beta(t)y-a(t)x,$$

并记 $x_0=x(0)$，$y_0=y(0)=x_1$；当 $\alpha(t)\in C[0,\infty)$，$\beta(t)\in C[0,\infty)$，引进函数

$$\phi(x_0,y_0)=\min_{\alpha,\beta}\int_0^\infty x^2(t;x_0,y_0)dt。$$

对于 $\forall S\in[0,\infty)$可以改写，

$$\phi(x_0,y_0)=\min_{\alpha,\beta}\left[\int_0^s x^2(t;x_0,x_1)dt+\int_s^\infty x^2(t;x_0,x_1)dt\right]$$

对任意给定的二维域 D，当 $\forall(x_0,y_0)\in D$，$0\le t<\infty$，利用[5]中 Bellman 最优化原理

可得

$$\min_{\alpha,\beta}\left[x_0^2+\frac{\partial\phi}{\partial x_0}y_0+\frac{\partial\phi}{\partial y_0}(\alpha(t)x_0+\beta(t)y_0)-a(t)x_0\right]=0, \tag{6}$$

由(x_0,y_0)的任意性，方程（6）可改写为

$$\min_{\alpha,\beta}\left[x^2+\frac{\partial\phi}{\partial x}y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\alpha(t)x+\beta(t)y)-a(t)x\right]=0, \tag{7}$$

用$u^*=\alpha^*(t)x+\beta^*(t)y$表待求的最佳反馈控制，由（7）可得

$$\alpha^*(t)x+\beta^*(t)y=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad 0\le t<\infty, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}y+\frac{\partial\phi}{\partial y}[\alpha^*(t)x+\beta^*(t)y-a(t)x]+x^2=0,\quad 0\le t<\infty, \tag{9}$$

尚须求出$\phi(x,y)$的始值$\phi|_{x=0}$，由(1)，(2)解的唯一性，$\phi(0,0)=\min\limits_{\alpha,\beta}\int_0^\infty x^2(t;0,0)$

$dt=0$，再由（8）式，

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{x=0}=\frac{\partial}{\partial y}(\phi|_{x=0})=-[\alpha^*(t)x+\beta^*(t)y]|_{x=0}=-\beta^*(t)y,$$

我们得到　$\phi|_{x=0}=-\dfrac{\beta^*(t)}{2}y^2,\quad y\in D\cap(x=0)$。　（10）

这就说明ϕ是始值问题（9），（10）的解，它是一以(x,y)的多项式为系数且始值也为多项式的始值问题，按（9），（10）解的唯一性，我们可用常用的Летов法求解，为此令

$$\phi=A(t)x^2+2B(t)xy+c(t)y^2,\quad 0\le t<\infty$$

将它代入（9）式，并分别令x^2，xy，y^2的各项系数为0，当$0\le t<\infty$，我们得到

$$1-2a(t)B-4B^2=0, \tag{11.1}$$

$$2A-8BC-2a(t)C=0, \tag{11.2}$$

$$2B-4C^2=0。 \tag{11.3}$$

因此，当$0\le t<\infty$，

$$A(t)=\sqrt{\frac{(a^2+4)^{1/2}-a}{2}}\left(\sqrt{a^2+4}-2a\right), \tag{12.1}$$

$$B(t)=\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{4}, \tag{12.2}$$

$$C(t)=\sqrt{\frac{(a^2+4)^{1/2}-a}{8}}. \tag{12.3}$$

代回（8）式，即得

$$u^* = \alpha^*(t)x+\beta^*(t)y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -2B(t)x-2C(t)y$$

$$= -\left[\left(\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}\right)x+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}}\right)y\right]。\qquad (13)$$

这就是说 $\alpha^*(t) = -\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$，$\beta^*(t) = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}}$，$0\leq t<\infty$。此时 $\phi|_{x=0} = C(t)y^2 = -\frac{\beta^*(t)y^2}{2}$，$0\leq t<\infty$ 显然成立，因（9），（10）解的唯一性，问题 A 的最佳反馈控制就是由（13）式所表出 $u^*(t)$，它所对应的系统（1），（2）就是问题（1），（2）的最佳反馈控制系统，总之，我们已证：

定理 1 假设 $a(t)\neq\text{Const}$，$a(t)\in C[0,\infty)$，且使

$$x''+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}}x'+\left[\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}+\frac{a}{2}\right]x=0,\quad 0\leq t<\infty \qquad (14)$$

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_1,\quad (x_0^2+x_1^2\neq 0) \qquad (15)$$

属 $L.C.$，则系统（14）（15）就是问题 A 的最佳反馈控制系统，其最佳反馈控制就是（13）式中的 u^*。

为了说明有相当广泛的 $a(t)$ 使方程（14）属 $L.C.$，我们须研究（14）属 $L.C.$ 的判定，先证：

引理 2 假设方程 $x''(t)+P(t)x'+q(t)x=0$ （16）

的系数在区间 $[0,\infty)$ 上满足下列条件：

（i）$p(t)\in C[0,\infty)$，$p(t)\geq 0$；$q(t)>0$，$q'(t)>0$，$q(t)\in C^1[0,\infty)$，$q'(t)=O(q(t))$；

（ii）$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{q(t)}}<\infty$，$\int_0^\infty \sqrt{q(t)}\left|\frac{d}{dt}\frac{q'(t)}{q^{3/2}(t)}\right|dt<\infty$，$\int_0^\infty \frac{p(t)}{\sqrt{q(t)}}dt<\infty$，

则方程（16）属 $L.S.\cap L.C.$。

证 先证（16）属 $L.S.$，对(16)在 $[0,\infty)$ 上的任一解，作函数 $V(t)=\sqrt{q(t)}x^2+\frac{[x']^2}{\sqrt{q(t)}}$，$0\leq t<\infty$，显见 $V'=\frac{q'x^2}{2\sqrt{q}}-\frac{[q'+4pq]}{2q^{3/2}}[x']^2$，$0\leq t<\infty$，由此易得 $0\leq V(t)\leq V(0)\sqrt{q(t)}$，$0\leq t<\infty$，因而 $x(t)=O(1)$，（16）属 $L.S.$。再证（16）属 $L.C.$，由于

$V(t)\leq\frac{q'}{2\sqrt{q}}\left(x^2-\frac{[x']^2}{q}\right)$，利用恒等式 $[x']^2=[xx']'-xx''=[xx']'+pxx'+qx^2$

代入我们得到

$$V(t)\leq \frac{q'}{2\sqrt{q}}\left(-\frac{[xx']'}{q}-\frac{p}{\sqrt{q}}xx'\right)。\tag{17}$$

将（17）两边在$[0,t]$积分，经分部积分后易得

$$V(t)\leq O(1)+O(1)\int_0^t \frac{p(\tau)}{\sqrt{q(\tau)}}V(\tau)d\tau.\tag{18}$$

在定理条件下 $V(t)=O(1)$，$0\leq t<\infty$，从而

$$\int_0^\infty x^2(t)dt=O\left(\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{q(t)}}\right)=O(1).$$

对方程（14）应用引理 2 可得

引理 3　对方程（14）假设：

（i）　$a(t)\in C^2(0,\infty)$，$a(t)>0$，$a'(t)>0$，$a'(t)=O(a(t))$，$a)+\infty)=+\infty$；

（ii）　$\int_0^\infty \left|\frac{a'(t)}{a(t)}\right|^2 dt<\infty$，$\int_0^\infty \frac{|a''(t)|}{a(t)}dt<\infty$，$\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{a(t)}}<\infty$，

则方程（14）属$L.S.\cap L.C.$。

再由定理 1 与引理 3 即得

定理 2　在引理 3 条件下，问题A的最佳反馈控制系统为（14），（15）；其最佳反馈控制为（13）中的u^*。

例　$a(t)=(t+1)^3\sum_{k=1}^m C_k t^k$，$C_k>0$，$k=1,2,\cdots,m$。满足引理 3 条件(i)，(ii)，此时定理 2 成立。

参 考 文 献

〔1〕 Иоффи, А. Д., В. И. Тихомиров Теория экстремальных задач, ИЗД. Наук, Москва,(1974).

〔2〕 Евтушенко Ю. Т., П. М. М. 34, (1970), 95－104.

〔3〕 O. L. R. Jacobs, The Damping Ratio of an Optimal Control System IEEE Trans. Automatic Control, AC－10, (1965), 473－476.

〔4〕 欧阳亮，二阶微分算子属于极限圆型的判定，数学学报，1，（1983），1－6.

〔5〕 R. Bellman, Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1957), Chapter 9.

On an Optimal Feedback Control Problem

Ouyang Liang

(Institute of Mathematics, Shandong University, Jinan)

Abstract

In this paper we consider:

Prob. A: Find $u^*=\alpha^*(t)x+\beta^*(t)x'$ belonging to the admissible set $U=\{\alpha(t)x+\beta(t)x',\ \alpha(t),\beta(t)\in C[0,\infty)\}$ such that the performance $J=\int_0^\infty x^2(t;x_0,x_1)dt=\min$ under the following constraints: $x''+a(t)x=\alpha(t)x+\beta(t)x'$, $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$, $x_0^2+x_1^2\neq0$.

Two Theorems are established.

Theorem 1 Suppose $a(t)\not\equiv$const, $a(t)\in C[0,\infty)$ and the equations

$$x''+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}}\,x'+\left[\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right]x=0 \qquad (1)$$

belong to L. C., then the optimal feedback control system of Prob. A is represented by Equation (1) with $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$, and the unique optimal feedback control of Prob. A is

$$u^*=-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}}\right)x-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}}\right)x' \qquad (2)$$

Theorem 2 Suppose that the coefficient $a(t)$ of Prob. A satisfies:

(i) $a(t)\in C^2[0,\infty)$, $a'(t)>0$, $a(t)>0$, $a'(t)=O(a(t))$, $0\le t<\infty$, $a(+\infty)=+\infty$

(ii) $\int_0^\infty\left|\frac{a'}{a}\right|^2dt<\infty$, $\int_0^\infty\frac{|a''|}{a}dt<\infty$, $\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{a}}<\infty$

then the conclutions of theorem 1 is hold also.