卷第2期　　控制理论与应用　　Vol.5, No.2
1988年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1988

非线性系统的能控性理论*

周鸿兴　　赵　怡
（山东大学数学系，济南）　（中山大学数学系，广州）

摘　要

本文介绍了近年来有关集中参数和分布参数非线性控制系统能控性理论方面的基本结果，并分析了处理这类问题的基本方法和提出了值得今后进一步研究的一些问题．文章附有65篇参考文献．

引　言

自从Kalman在1960年提出了控制系统的能控性能观性概念以来[27]，人们对于集中参数和分布参数线性控制系统的能控性能观性进行了大量的研究[1,2,49,58]，进而自七十年代以来，非线性控制系统能控性的问题越来越受到广泛的重视，并成为重要的研究领域．

本文将分成三节来概述这一理论的基本内容、主要方法以及目前的发展状况．

一、集中参数非线性控制系统的能控性

在 R^n 中考虑非线性控制系统

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ u(t)),\quad t>t_0 \tag{1.1}$$

在关于控制 $u(t)$ 的值域 $U\subset R^m$、非线性函数 f 及允许控制类 U 的适当假设之下[38]，对应于给定的初态 $x_0\in R^n$ 及 $u\in U$，系统（1.1）存在唯一连续解 $x(t)=x(t;\ t_0,x_0,u)$，定义集合

$$K(t_0,\ t_1)=\{x(t_1)=x(t_1;\ t_0,\ 0,\ u),\ u\in U\}, \tag{1.2}$$

$$C(t_0,\ t_1)=\{x_0:\ x(t_1;\ t_0,\ x_0,\ u)=0,\ u\in U\},\quad t_1>t_0 \tag{1.3}$$

$K(t_0,\ t_1)$ 与 $C(t_0,\ t_1)$ 分别称为系统在 $[t_0,\ t_1]$ 上的能达集和零能控集．Markus在1965年首次给出（1.1）能控性的如下定义[38]．

定义 1.1　如果坐标原点 $0\in R^n$ 是 $K(t_0,\ t_1)$ 的内点，即对足够小的 $\varepsilon>0$，只要 $\|\bar{x}_1\|<\varepsilon$，$\bar{x}_1\in R^n$，都存在 $\bar{u}\in U$，使得 $\bar{x}_1=x(t_1;\ t_0,\ 0,\bar{u})$，则称系统（1.1）

* 中国科学院科学基金资助及中山大学高等学术研究中心部分资助的课题．
本文于1987年1月9日收到，1988年1月12日收到修改稿．

是局部能达的或局部能控的。如果$0\in R^n$是$C(t_0, t_1)$的内点，即对足够小的$\varepsilon>0$，只要$\|\overline{x}_0\|<\varepsilon$，$\overline{x}_0\in R^n$，都存在$\overline{u}\in U$，使得$x(t_1; t_0, \overline{x}_0, \overline{u})=0$，则称系统(1.1)是局部零能控的。

今后，我们把系统的局部能达性与局部零能控性统称为系统的局部能控性性质。此时有

定理 1.2 设$0\in R^m$是U的内点，$f(t, x, u)=f(x, u)$，且$f(0, 0)=0$以及$\operatorname{rank}[B, AB, \cdots, A^{n-1}B]=n$，其中$A=\frac{\partial}{\partial x}f(0, 0)$，$B=\frac{\partial}{\partial u}f(0, 0)$，则系统(1.1)对任何$t_1>t_0=0$都是局部能达的和局部零能控的。

一般来说，系统的局部能达性与局部零能控性是不等价的但又有一定联系的概念。定理1.2表示，如果一个非线性控制系统可以局部线性化，那么就可以利用它的线性化控制系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad A=\frac{\partial}{\partial x}f(0, 0),\quad B=\frac{\partial}{\partial u}f(0, 0) \tag{1.4}$$

的能控性性质与非线性解映射的局部可逆性来研究非线性系统(1.1)的局部能控性性质。

定义 1.3 设$x_1\in R^n$，如果存在$t_1>t_0$，使得$x_1\in K(t_0, t_1)$，则称系统(1.1)在$[t_0, t_1]$上关于x_1是能达的或能控的；如果$K(t_0, t_1)=R^n$，则称系统(1.1)在$[t_0, t_1]$上是能控的。设$x_0\in R^n$，如果存在$t_1>t_0$，使得$x_0\in C(t_0, t_1)$，则称系统(1.1)在$[t_0, t_1]$上关于x_0是零能控的；如果$C(t_0, t_1)=R^n$，则称系统(1.1)在$[t_0, t_1]$上是零能控的。

为强调起见，称定义1.3中的能控性性质为整体能控性。1972年Mirza与1974年Tonkov考虑了如下的系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t, x(t), u(t)),\quad t>t_0, \tag{1.5}$$

其中 $A(t)$、$B(t)$为光滑$n\times n$与$n\times m$矩阵，f是非线性扰动。若(1.5)的未被扰动线性系统(设其基解阵为$\Phi(t, s)$)在$[t_0, t_1]$上是整体能控的，则矩阵

$$W(t_0, t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, s)B(s)B^{\tau}(s)\Phi^{\tau}(t_0, s)ds$$

非异，故可定义R^n到$U=C((t_0, t_1); R^m)$的一一线性映射S：$u=S\xi$，使得$\xi=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1, s)B(s)u(s)ds$，$\forall\xi\in R^n$。现设$x_1\in R^n$，$v(\cdot)\in U$，则可定义一个映射$F$：$U\to R^n$。

$$Fv=x_1-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t, s)f(s; x(s; t_0, 0, v(\cdot)), v(s))ds,\ \forall v\in U。$$

当f满足适当假设时，映射SF：$U\to U$存在不动点$\hat{u}=SF\hat{u}$，此时有$x_1=x(t_1;$

$t_0, 0, \hat{u}) \in K(t_0, t_1)$，即系统（1.5）具有整体能控性．类似可讨论系统 $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) + f(t, x(t), u(t))$，如果未被扰动系统 $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ 具有整体能控性质，且非线性扰动 f 满足某些特定假设，这些假设实质上是限定 f 的值不能太大，则可用非线性分析方法，尤其是不动点定理来得到原系统的能控性质．当然对 g 应有一定的限制[15～18,59]，有关讨论还可参考 Aronsson[3,4]，Hermes[32～34]，Lukes[40]等．

二、分布参数非线性控制系统的能控性

最先讨论分布参数非线性控制系统能控性问题的是 Fattorini[23]，他考虑了受到非线性复原力一维波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(x, y) + b(x)u(t), \quad 0<x<l, \quad 0<t<T, \tag{2.1}$$

其中　$u \in \boldsymbol{U} = L^2(0, T)$，$b \in L^2(0, l)$．假设受控弦的位置满足齐次边界条件和零初始条件：

$$a_0 y(0, t) + a_1 \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = b_0 y(l, t) + b_1 \frac{\partial y}{\partial x}(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.2}$$

$$y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{2.3}$$

记 $H = \boldsymbol{D}(A)$，$K = \boldsymbol{D}(A^{\frac{1}{2}})$，其中算子 A 定义如下：

$$\boldsymbol{D}(A) = \{ y: y' \text{绝对连续}, \ y'' \in L^2(0, l), \ a_0 y(0) + a_1 y'(0) = b_0 y(l) + b_1 y'(l) = 0 \}$$

$$(Ay)(x) = -y''(x), \qquad 0<x<l$$

$\boldsymbol{D}(A^{\frac{1}{2}})$ 是分数幂算子 $A^{\frac{1}{2}}$ 的定义域．则系统（2.1）～（2.3）在关于 f 的适当假设之下对于每一给定的 $u \in \boldsymbol{U}$ 都定义了唯一解 $y(x, t)$．记 $y(t)(x) = y(x, t)$，定义系统（2.1）～（2.3）的解映射 Φ：$\boldsymbol{U} \to L^\infty(0, T; H \times K)$ 与 Φ_T：$\boldsymbol{U} \to H \times K$：

$$\Phi(u)(t) = (y(t), \dot{y}(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u \in \boldsymbol{U}, \tag{2.4}$$

$$\Phi_T(u) = \Phi(u)(T) = (y(T), \dot{y}(T)), \quad u \in \boldsymbol{U}. \tag{2.5}$$

定理 2.1　解映射 $\Phi_T(u)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 中是 Frechet 连续可微的，它在 $u \in \boldsymbol{U}$ 处的微分 $d\Phi_T(u)$ 由下式给出：$d\Phi_T(u)v = (z(T), \dot{z}(T))$，其中 $z(\cdot)$ 是（2.1）的线性化方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t))z + b(x)v(t), \quad 0<x<l, \quad 0<t<T \tag{2.6}$$

在条件（2.2）、（2.3）之下的解。

利用 Russell 关于形如（2.6）的线性双曲型控制系统的能控性定理[47,48]以及抽象空间中的隐函数定理，Fattorini 证明了解映射 Φ_T 的值域在 $T\geqslant 2l$ 时含有空间 $H\times K$ 零元素的一个邻域，即系统（2.1）～（2.3）在 $T\geqslant 2l$ 时是下面意义下局部能控的。

定义 2.2 如果存在 $\varepsilon>0$，使对任意的 $y_T\in H$，$\dot{y}_T\in K$，只要 $\|y_T\|_H<\varepsilon$，$\|\dot{y}_T\|_K<\varepsilon$，都存在 $u\in U$，使得 $\Phi_T(u)=(y_T,\ \dot{y}_T)$，则称系统（2.1）～（2.3）是局部能控的。

1976年，Chewning 在[14]中利用类似的方法处理了一类带有边界控制的高维非线性双面曲型方程的局部能控性问题。

至于非线性双曲型控制系统的整体能控性问题，直到1981年才由陈巩（Goong Chen）等人进行了讨论[13]。考虑非线性波动方程

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}-\Delta\xi(x,\ t)+f(\xi(x,\ t))=u(x,\ t),\ x\in\Omega,\ t>0, \qquad (2.7)$$

其中 Δ 是 n 维 Laplace 算子，$\Omega\subset R^n$，f 是非线性函数，它满足下面的假设

$(F1)$ 当 $\xi(\cdot)\in L^2(\Omega)$ 时，$f(\xi(\cdot))\in L^2(\Omega)$；

$(F2)$ $\|f(\xi_1(\cdot))-f(\xi_2(\cdot))\|\leqslant k\|\xi_1(\cdot)-\xi_2(\cdot)\|$，$\forall\xi_1(\cdot)$、$\xi_2(\cdot)\in L^2(\Omega)$，其中 k 是小于 $-\Delta$ 的第一个固有值的常数。此外，假设（2.7）中的函数 ξ 应满足 $\xi(x,\ t)|_{\partial\Omega}=0$。

如果我们定义状态空间 $X=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$，则（2.7）等价于空间 X 中的抽象非线性方程

$$\dot{y}(t)=A[y(t)]+Bu(t),\qquad t>0, \qquad (2.8)$$

其中 $y(t)=[\xi(\cdot,\ t),\ \eta(\cdot,\ t)]'$，$D(A)=[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]\times H_0^1(\Omega)$，（本文中，$H^m(\Omega)$ 及 $H_0^m(\Omega)$ 均为Sobolev空间）

$$A[y(t)]=\begin{pmatrix}\eta(\cdot,\ t)\\ \Delta\xi(\cdot,t)-f(\xi(\cdot,t))\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ I\end{pmatrix}.$$

定义 2.3 设 y_0，$y_f\in X$，如果存在 $u\in U$ 以及 $t_f>0$，使得系统（2.8）在控制 $u(\cdot)$ 作用之下的解 $y(\cdot,\ u)$ 满足 $y(0;\ u)=y_0$，$y(t_f;\ u)=y_f$，则称系统(2.8)关于 y_0 与 y_f 是 $[0,\ t_f]$ 上精确能控的或精确能达的。

利用能稳性的能控性定理[47]及非线性半群的理论[6]，陈巩等得到了如下的结论[13]：

定理 2.4 设 $t_f>0$ 足够大，则空间 X 中的系统（2.8）关于任给的 y_0、y_f 在 $[0,\ t_f]$ 上是精确能控的。

以上是关于双曲型非线性控制系统的情形，1978年 J.Heny 讨论了抛物型非线性控制系统：

$$\frac{\partial y}{\partial t}+Ay+F(y)=Bv,\ Q=(0,\ T)\times\Omega, \tag{2.9}$$

$$y(0,\ x)=0,\ x\in\Omega,\ y(t,\ x)|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.10}$$

其中$\Omega\subset R^n$的边界$\partial\Omega$具有适当的光滑性，A是二阶椭圆型算子：

$$<Ay,\ z>_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}=a(y,\ z),\ \forall y,\ z\in H_0^1(\Omega),$$

这里，

$a(y,\ z)$是y、z的对称双线性型，且$a(y,z)\geqslant\alpha\|y\|^2_{H^1(\Omega)}$，$y\in H_0^1(\Omega)$。

在(2.9)中，$B\in L[U,\ L^2(Q)]$，U是控制空间，例如当$U=L^2(0,\ t_f;\ U)$时，$B\in L[U,\ L^2(\Omega)]$，这里，$L(M,\ N)$是由Bonach空间M到N的有界线性算子全体组成的空间。U是另一Bonach空间。在适当的假设之下，系统(2.9)、(2.10)对每一个$v\in U$存在唯一解$y(t)=y(t;\ v)$。

定义 2.5 空间$L^2(\Omega)$中的子集合$K_{t_f}(F)=\{y(t_f;\ v):\ v\in U\}$称为系统(2.9)、(2.10)在时刻$t_f$的能达集。如果存在$t_f>0$，使得$\overline{K_{t_f}(F)}=L^2(\Omega)$，则称系统(2.9)、(2.10)在时刻$t_f$是逼近能控的。

J.Henry 在[30]中证明了下面的

定理 2.6 设系统(2.9)、(2.10)满足下面的条件：$\overline{BU}=L^2(Q)$，非线性函数F满足下列条件之一：

$$F\text{是 Lipshitz 连续的且}\ |F(y)|\leqslant c(1+|y|^p),\ 0<p<1, \tag{2.11}$$

$$|F(y)-F(z)|\leqslant c|y-z|(1+|y|^{p-1}+|z|^{p-1}),\ p\geqslant 1,\ \frac{1}{p}>1-\frac{2}{n}, \tag{2.12}$$

则系统(2.9)、(2.10)关于任何$t_f>0$都是逼近能控的。

显然，定理2.6中的假设$\overline{BU}=L^2(Q)$不尽合理，因为它在有限维情形中等价于$U=X$，$B=I$。本文作者之一针对这一关键性假设，建立了将有限维与无穷维非线性控制系统统一起来的逼近能控性理论，并首次处理了非线性抛物型控制系统的精确能控性（能达性）问题[61,62,63,64]。

我们首先讨论一维半线性热方程

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+F(x,\ y(x,\ t))+b(x)u(t),\ 0<t<t_f,\ 0<x<l, \tag{2.13}$$

$$y(x,\ 0)=0,\ 0\leqslant x\leqslant l,\ y(0,\ t)=y(l,\ t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant t_f, \tag{2.14}$$

其中$b(\cdot)\in X=L^2(0,\ l)$，$u(\cdot)\in U=L^2(0,\ t_f)$。此时有下面的[61]。

定理 2.7 假设(2.13)中的非线性函数$F(\cdot,\ y(\cdot))$在X中一致有界并满足$F(\cdot,\ 0)=0$以及Lipshitz条件

$$\|F(\cdot,\ y_1)-F(\cdot,\ y_2)\|\leqslant M_1\|y_1-y_2\|.$$

则当$\frac{n^2\pi^2}{l^2}|b_n| \geq M_b > 0$时，系统（2.13）、（2.14）的能达集$K_{t_f}(F) \supset D(e^{KA^{\frac{1}{2}}})$，

其中$b_n = \langle b, e_n \rangle_X$，$e_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}$，$n = 1, 2, \cdots$，$K$是仅与$t_f$有关的正常数。

在〔62〕中讨论了更一般的抽象控制系统

$$\dot{y}(t) + Ay(t) = F(y(t)) + Bu(\cdot)(t), \quad 0 < t < t_f, \tag{2.15}$$

其中$-A$生成实Hilbert空间X上的可微半群$S(t)$，$t \geq 0$，$B \in L[U, L^2(0, t_f; X)]$。设$0 \leq t_0 < t_f$，$B_{t_0} \in L[U, L^2(t_0, t_f; X)]$，则我们称下列半线性抽象控制系统为（2.15）在$[t_0, t_f]$上的截断系统

$$\dot{y}(t) + Ay(t) = F(y(t)) + B_{t_0}v(\cdot)(t), \quad t_0 < t < t_f. \tag{2.16}$$

利用截断系统（2.16），文章证明了

定理 2.8　设非线性系统（2.15）中的F满足

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\|, \quad y_1、y_2 \in X. \tag{2.17}$$

如果存在$0 \leq t_0 < t_f$，使得截断系统（2.16）满足下面的假设：任给$\varepsilon > 0$，$p(\cdot) \in L^2(t_0, t_f; X)$，存在$v(\cdot) \in U$，使得

$$\left\| \int_{t_0}^{t_f} S(t_f - t)[p(t) - B_{t_0}v(\cdot)(t)]dt \right\| < \varepsilon, \tag{2.18}$$

$$\| B_{t_0}v(\cdot)(\cdot)\|_{L^2(t_0, t_f; X)} \leq q_1 \|p(\cdot)\|_{L^2(t_0, t_f; X)}, \tag{2.19}$$

$$M_3(t_f - t_0)K_1 q_1 < 1, \tag{2.20}$$

其中M_3是由（2.16）的解映射确定的常数：

$$\|y(\cdot; v_1) - y(\cdot; v_2)\|_{L^2(t_0, t_f; X)} \leq M_3(t - t_0)\| B_{t_0}(v_1 - v_2)\|_{L^2(t_0, t_f; X)}$$

则非线性抽象控制系统（2.15）对任意给定的初始状态都是在$[0, t_f]$上逼近能控的。

该定理有两个重要的特殊情形：（1）$\overline{B_{t_0}U} = L^2(t_0, t_f; X)$，即J.Henry讨论过的情形，此时对任何$t_f > 0$，定理2.8的条件得到满足。（2）有限维情形。

在〔63，64〕中讨论了非线性控制系统

$$\dot{y}(t) + Ay(t) = \alpha F(y(t), u(t)) + Bu(t), \quad t_0 < t < t_f \tag{2.21}$$

的能达集$K(t_0, t_f)(F)$与相应的线性系统（$F \equiv 0$）的能达集$K(t_0, t_f)$之间的关系，其中$-A$是自反Banach空间X上半群的生成元，$B \in L[U, X]$，U是另一自反Banach空间。如果考虑这样一种特殊情形：$F(y, u) = F(y)$，$\overline{R(B)} = X$，其中$R(B)$表示算子B的值域，则有下列关系：

$$K(t_0, t_f) \subset K(\tau, t_f)(F) \subset \overline{K}(t_0, t_f), \quad \tau \in [0, t_0] \tag{2.22}$$

它刻划了非线性系统（2.21）的精确能控性。

从以上关于非线性分布参数控制系统能控性理论来看，非线性分析尤其是不动点方法是目前处理问题的主要方法。目前情况表明，诸如能达集的构造、非线性边界控制系统的能控性理论、特殊类型非线性项对能控性的影响等问题还有待人们进一步去研究。

三、双 线 性 系 统

近二十年来，作为非线性系统的一种特殊类型——双线性系统越来越广泛地被人们所研究，主要原因是：（1）它可以作为一大类重要的实际问题的简单模型[39]；（2）在许多情况下，用它来近似非线性系统要比用线性系统更准确；（3）它有丰富的几何与代数结构，提供了富有成效的研究领域；（4）把它看作为一个变系数或变结构的线性系统正是设计“robust”控制系统的一个有力工具[57]。

（一）集中参数双线性系统的能控性

1。离散型：离散时间双线性系统的能控性是由T。Goka 1971年开始研究的[28]，他在〔29〕中给出了系统

$$x_{K+1}=(A+u_KB)x_K+Cu_K,\quad K=0,\ 1,\ \cdots \tag{3.1}$$

的能控性定义及在 $R^n\setminus\{0\}$ 中能控的充分条件。

在上述结果的基础上，〔21〕在1977年得到了当 $Cu_K=0$ 时（3.1）完全能控的充要条件。随后〔22〕在1978年用把（3.1）的能控性转化为增加了维数的（3.1）对应的齐次系统的能控性技巧得到了（3.1）在 $R^n\setminus\{0\}$ 上能控的充分必要条件。而〔24〕在1979年对〔22〕中的条件作了进一步的简化。归纳起来，其主要的一个结果如下定理所述。

定理 3.1　把系统（3.1）写成如下的等价形式：

$$x_{K+1}=A\{[I+u_KCh^T]x_K+u_K\widetilde{C}\},$$

其中 $B=A\widetilde{C}h^T$，$C=A\widetilde{C}$，且设 A、C、h 为已知，

$$\mathrm{rank}[h,\ A^Th,\ \cdots(A^{(n-1)})^Th]^T=m\leqslant n,$$

则（3.1）在 $R^n\setminus\{0\}$ 中完全能控的充要条件是：

i）$\Gamma(A,\ \widetilde{C})\triangleq[\widetilde{C},\quad A\widetilde{C},\ \cdots A^{n-1}C]$ 是非奇异的；

ii）

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1 & h^T\\ 1 & h^TA^K\\ \vdots & \vdots\\ 1 & h^TA^{2K}\end{pmatrix}=\alpha+1,$$

其中 $K\alpha=m$，K 为集 $\{j=h^TA^j\widetilde{C}\neq0,\ 0<j\leqslant m^2\}$ 的最大公因子。

此外，〔43〕及〔26〕讨论了其它离散类型双线性系统的能控性，〔36〕讨论了不能控情形及在子空间上能控的问题，并指出尚未解决的问题。

2。连续型：连续型双线性系统的能控性最早是由Rink及Mohler在1967年开始研究的[45][42][46]，得到了系统

$$\dot{x}(t)=(A+\sum_{K=1}^{m}u_K B_K)x(t)+Cu(t) \tag{3.2}$$

能控的两个充分性条件，其基本思想是取控制使得系统的系数矩阵的特征根具有规定的性质，进而通过平衡点集及不变子空间来讨论。

随后，一些文献[19][20][53][11][12]则是直接研究能达集而得到有关的结果。其后，以李代数为工具进行研究的文献越来越多，并起了主导作用。在〔53〕中证明了系统

$$\dot{x}(t)=(\sum_{i=1}^{r}u_i(t)A_i)x(t) \tag{3.3}$$

在 R^n 中能控的充要条件是由 $A_1\cdots A_r$ 生成的李代数 g 是可传递的，而〔8〕对可传递的李代数进行分类，并证明确实存在各种类型的矩阵 $A_0\cdots A_r$ 上的有理计算使得有限步内决定系统

$$\dot{x}(t)=(A_0+\sum_{i=1}^{r}u_i(t)A_i)x(t) \tag{3.4}$$

是否具有可传递性质，从而把（3.3）按能控性分了类。〔54〕对（3.3）证明了在一个李代数下的标准的秩变换里系统能控的一个充分条件，而〔10〕则对〔54〕中理论上的结果给出一种展开的算法，使得〔54〕的结果可以实际地被应用。并指出系统（3.4）的能达性等价于 exp（tA_i）（$i=0,\cdots,r$）生成的矩阵李群 G 在 R^n 上是否可传递。随后〔44〕在1981年对轨线由 $R^n\setminus\{0\}$ 到一个 $n-1$ 维球的投影生成的系统所对应的向量场研究了齐次双线性系统在 $R^n/\{0\}$ 上的能控性。〔25〕在1982年考察了系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+u(t)Bx(t), \tag{3.5}$$

及

$$\dot{x}(t)=u(t)Ax(t)+v(t)Bx(t), \tag{3.6}$$

其中 $u(t)$，$v(t)\in R$。设 $GL^+(n,R)$ 表示 $R^{n\times n}$ 中行列式恒正的自同构群，$SL(n,R)$ 表示 $GL^+(n,R)$ 中行列式为1的子集构成的自同构群，并假定，（H_1）：$B=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，且迹为零，$b_1<b_2\cdots<b_n$，$b_i-b_j\neq b_k-b_m\ \forall\ (i,j)\neq(R,m)$；（$H_2$）：$a_{1n}\cdot a_{n1}>0$；（$H_3$）：对 $|i-j|\neq 1$ 有 $a_{ij}\neq 0$。该文得到如下主要结果：

定理 3.2 1）设（H_1）～（H_3）成立，则系统（3.5）在 $SL(n,R)$ 上是能控的；2）在（H_1）（H_3）成立时，系统（3.6）在 $SL(n,R)$ 上是能控的；3）对系统（3.5）设（H_1）（H_2）成立，对系统（3.6）设（H_1）成立，则（3.5）和（3.6）在 $SL(n,R)$ 上（和在 $R^n\setminus\{0\}$ 上）能控的充要条件是 A 是一个不可约的置换矩阵。

此外，〔9〕在1982年还给出了双线性系统正象限能控性的一些结果。

（二） 分布参数双线性系统的能控性

关于这方面的研究是近几年的事情。Franke 在 1979～1980年对形如

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{r}u_i(t)N_ix(t)+Bu(t) \tag{3.7}$$

的系统进行了讨论[57]。特别对一类标量双线性系统得到了能达性的条件。其基本方法是通过格林函数把解表成为一个积分形式，然后用无穷维矩量方法加以研究。

M•Slemrod 等在1982年研究了在 Banach 空间X上形如

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Aw(t) + p(t)B(w(t)) \\ w(\cdot) = w_0 \in X \end{cases} \tag{3.8}$$

的抽象发展方程[5]，其中A在X上生成一个C_0半群，B是$X \to X$的C^K映射$(K \geqslant 1)$，控制$p \in Z(T)$，$Z(T)$是连续及稠地嵌入于$L^1(0,T,R)$中的Banach空间、该文在B是$X \to X$的有界线性算子的情况下，得到一个关于精确能控性的否定结果：

定理 3.3　在上述假设下，当$p_n \xrightarrow{弱} p$时（在$L^1(0,T,R)$），$w(\cdot, p_n, w_0) \xrightarrow{强} w(\cdot, p, w_0)$（在$C(0, T, X)$），且集合

$$S(w_0) = \bigcup_{t=0}^{\infty} w(t, p, w_0)$$
$$p \in L^r_{LOC}(0, \infty; R), \ r>1$$

包含在X中可数个紧集的并集中，因而$S(w_0)$在X中有稠余集。

在定理3.3的启示下，〔5〕进一步研究了有限维观察下的能控性问题，对Hilbert空间上的抽象双曲型方程

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + Ax(t) + p(t)Bx(t) = 0, \\ x(0) = x_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}), \dot{x}(0) = x_1 \in H, \end{cases} \tag{3.9}$$

利用 Riesz 基讨论了有限维观察下的能控性，特别对（3.9）证明了$r=1$时定理3.3的结论仍成立，但对（3.8）的一般情形，当$r=1$时，定理3.3的结论是否成立仍是一个未解决的问题。

本文作者之一最近所指导的一篇硕士论文（待发表）把定理3.3的结果推广到B为无界的情形。并对（3.8）加上线性项$B_0u(t)$的情况给出精确或近似能控的充要条件，并构造出反馈控制。此外，还研究了形如

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = u(t)B(t)x(t) + f(t) \quad t \in (0, T) \triangleq I \\ x(0) = x_0 \in H \end{cases} \tag{3.10}$$

的双线性系统分布解的能控性问题[60]。设V、H是Hilbert空间，$V \hookrightarrow H \subset V'$，对$t \in I$，$A(t) \in \mathrm{L}(v, v')$，$A(t)$强制及对$\varphi$、$\phi \in V$，$t \to \langle A(t)\varphi, \phi \rangle$在$I$上可测。设$B \in L^{\infty}(I, \mathrm{L}(H))$，$K(t, x_0) = \{y : y = x(t), x \in S\}$，及$S = \{x(\cdot, u, x_0) : u \in L^{\infty}(0, T), x(t, u, x_0)$是（3.10）的分布解$\}$。

定义 3.1　在上述假设下，系统（3.10）称为是逼近能达的是指对任一给定的$\phi \in Q$，其中Q是H的某一稠子集，存在$T>0$，使得$\langle \phi, y \rangle = 0 \ \forall y \in K(T, x_0)$时，有$\phi \equiv 0$。

定理 3.4　在上述假设下，如果$A(t) = A$不依赖于t及算子$(-A^*)$具有定义

域$D(-A^*)\subset V$，且在H上生成C_0半群$T^*(t)$，则系统（3.10）是逼近能控的充分条件是：对任一给定的$\phi\in D(-A^*)$，存在$T>0$及$u\in L$（0，T）使得

$$u(t)B(t)[T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)f(s)ds+(\int_0^t T(t-s)T^*(T-s)ds)\phi]$$
$$=T^*(T-t)\phi+f(t).$$

如果$A(t)$依赖于t时，可假定$(-A^*(t))$生成一个强发展算子以得到类似结果。

对分布参数双线性系统建立一个合理的框架，使得解的性质同时满足能达性及最优控制存在性两个方面的要求是一个很有意义及待解决的问题。

参考文献

〔1〕 钱学森、宋健，工程控制论（修订版），科学出版社，北京，（1980）。

〔2〕 线性控制系统的能控性和能观测性，科学出版社，北京，（1975）。

〔3〕 Aronsson,G., Anew Approach to Nonlinear Controllability, J.Math. Anal. Appl.,44, (1973), 763-772.

〔4〕 Aronsson. G., Global Controllability and Bang-Bang Steering of Certain Nonlinear Systems, SIAM J.Control, 11, (1973), 607-620.

〔5〕 Ball.J.M., J.E.Marsden and M.Slemrod,Controllability for Distributed Bilinear Systems, SIAM J. Control and Opt., 20:4, (1982), 575-579.

〔6〕 Barbu,V., Nonlinear Semigroup and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoof, Leyden, the Netherlands, (1976).

〔7〕 Bonnard.B.,Controllabilite de Systemes Mechaniques Sur Les Groupes de Lie, SIAM J.Control & Opt., 22, (1984), 711-722.

〔8〕 Boothby.W.M., A Transitivity Problem for Control Theory, J.Diff. Eqs., 17, (1975).

〔9〕 Boothby,W.M., Comments on the Positive Orthart Controllability of Bilinear Systems, SIAM J.Control & Opt., 20:5, (1982),634—644.

〔10〕 Boothby,W.M.and E.N. Wilson, Determination of the Transitivity of Bilinear Systems, SIAM J. Control & Opt., 17:2, (1979), 212-221.

〔11〕 Brockett,R., System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces, SIAM J. Control, 10, (1972), 265-284.

〔12〕 Bruni,G., G.Dipllo and G.Koch, Bilinear Systems: An Appealing Class of "nearly linear" Systems in Theory and Applications, IEEE Trans., AC-19, 4, (1974), 334-348.

〔13〕 Chen,G., W.H.mills and G. Crosta, Exact Controllability Theorems and Numerical Simulations for Some Nonlinear Differential Equations, SIAM J. Control & Opt., 19:6, (1981), 765-790.

〔14〕 Chewning,W.C., Controllability of the Nonlinear Wave Equation in Several Space Variablis, SIAM J. Control & Opt., 14,(1976), 19-25.

〔15〕 Dauer,J.P., A Note on Bounded Perturbations of Controlable System, J. Matn.Anal., 42, (1973), 221-225.

〔16〕 Dauer,J.P,.Bounded Perturbation of Controlable System, Ibid., 48, (1974), 61-69。

〔17〕 Dauer,J.P., Nonlinear Perturbations of Quasi-linear Control System, Ibid., 54, (1976), 717-725.

〔18〕 Dauer,J.P., Controllability of Perturbed Nonlinear System, Lincei-rdnd. Sc.fos.Mat.Enat., 63, (1977), 345-350.

〔19〕 Elliott,D.L., A Consequence of Controllability, J.Diff. Eqs., 10, (1971), 364-370.

〔20〕 Elliott,D.L. and T.J.Taun, Controllability and Observability for Bilinear Systems, Presented at The SIAM(1971) National Meeting, Univ. of Wasnington, Seattle, Wash., July, (1971).

〔21〕 Eruns,M.E. and D.N.P.Murthy, Controllability of a Class of Discrete Time Bilinear Systems, IEEE Trans., AC-22, (1972).

〔22〕 Eruns,M.E. and D.N.P.Murthy,Controllability of Discrete Time Inhomogeneous Bilinear Systems, Auto., 14, (1978), 147-151.

〔23〕 Fattorini,H.O., Local Controllability of Nonlinear Wave Equation, Math. Systems Theory, 9, (1975), 30-45.

〔24〕 Funahashi.Y., Comments on Controllability of a Class of Discrete Time Bilinear Systems, IEEE Trans., AC-24, 4,(1979), 802-803.

〔25〕 Gauthier,J.P. et G. Bornard, Controlabilite Des Systems Bilineaires, SIAM J.Control & Opt., 20:3, (1982), 377-384.

〔26〕 Grasselli,O.M., A.Isidore and F.Nicolo, Dead-beat Control of Discrete Time Bilinear [Systems, Int.J. Control, 32:1, (1980), 107-114.

〔27〕 Grasse,K.A., Perturbations of Nonlinear Controllable Systems,SIAM J.Control & Opt., 19, (1981), 203-220.

〔28〕 Goka,T., Controllability of Single Input Discrete Bilinear Systems, D.Sc.Dissertation, Washington Univ., St. Lonis, Mo., (1971).

〔29〕 Goka,T., T.J.Tao and Zaboirszky, On the Controllability of a Class of Discrete Bilinear Systems, Auto., 9, (1973),615-662.

〔30〕 Aenry,J., Etude de la Controlabite de Certains Equations Paraboliques Nonlineaires, These, Detat, Paris, June, (1978).

〔31〕 Hermann,R., and A.J. Krener, Nonlinear Controllability and Observability, IEEE Trans., AC-22, (1977), 728-740.

〔32〕 Hermes, H., On Local and Global Controllability, SIAM J. Control, 12, (1974), 252-261.

〔33〕 Hermes.H., Local Controllability, of Observables in Finite and Infinite Dimensionnal Nonlinear Control Systems, Appl. Math. and Opt., 5, (1979), 117-125.

〔34〕 Hermes,H., Controllability of Nonlinear Delay Differential Equations, Nonlinear Analysis, 3, (1979), 483-493.

〔35〕 Hirscharn,R.M., Global Controllability of Nonlinear Systems, SIAM J. Control & Opt., 14, (1976), 700-711.

〔36〕 Hollis,p., and D.N.P.Murthy, Study of Uncontrollable Discrete Bilinear System, IEEE Trans., AC-27, 1, (1982), 184-186.

〔37〕 Kalman, R.E.,On the General Theory of Control System, Proc. of the First Congress of IFAC, Moscow, (1960).

〔38〕 Lee,E.B., and L.Markus, Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1967).

〔39〕 Lo,J.T-H., Global Bilinearization of Systems with Control Appearing Linearly, SIAM J. Control, 13:4, (1975),879-885.

〔40〕 Lukes,D., Global Controllability of a Class of Nonlinear Systems, Ibid, 10,(1972),112-126.

〔41〕 Mirza,K., and B.F.Womack, On the Controllability of a Class of Nonlinear Systems, IEEE Trans., AC-17, (1972), 531-535.

〔42〕 Mohler, R.R., and R.E.Rink, Multivariable Control Systems, Dusseldorf, Germany, (Oct. 1968).

〔43〕 Murthy, D.N.P., Controllability of a Class of Discrete Time Bilinear Systems, IEEE Trans., AC-24, 6, (1979), 974-975.

〔44〕 Ohtani,Y., Controllability of Homogeneous-in-the-state Bolinear Systems, Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers (Japan), 17:2, (1981).

〔45〕 Rink,R.E., and R.R.Mohler, Controllability and Optimal Control of Bilinear Systems, Tech. Rep. EE-143,(June 1967).

〔46〕 Rink,R.E., and R. R. Mohler, Completely Controllable Bilinear Systems, SIAM J. Control,6:3, (1968), 477-486.

〔47〕 Russell,D.L., Nonharmonic Fourier Series in the Control Theory of Distributed Parameter Systems, J. Math. Anal. Appl., 18,(1967), 542-560.

〔48〕 Russell,D.L., Exact Boundary Value Controllability Theorems for Wave and Heat Processes in Star-complemented Regions, in Differential Games and Control Thepry, Roxin, Liu, Sternberg, eds., Marcel Dekker, New York,(1974).

〔49〕 Russell,D.L., Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations: Recent Progress and Open Quastions SIAM Re.,20, (1978),639-739.

〔50〕 Seidman,T.I., and H.X.Zhou(周鸿兴), Existence and Uniquenees of Optimal Controls for Quasilinear Parabolic Equation, SIAM J. Control & Opt.,20,(1982),747-762.

〔51〕 Slemrod,M., Stabilization of Bilinear Control Systems with Applications to Nonconservative Problems in Elasticity, Ibid., 16, (1978), 131－141。

〔52〕 Seidman,M., and J.M. ball, Nonharmonic Fourier Seriers and the Stabilization of Distributed Semi－linear Control Systems, Communications on Pure and Appl. Math., 32, (1979), 555－587,

〔53〕 Sussmann,H,J., and V.Jurajevic, Controllability of Nonlinear Systems, J.Differential Equs.,12, (1972),95－116.

〔54〕 Sussmann,H.J, and V.Jurdjevic Control Systems on Lie Groups, Ibid, 12, (1972).

〔55〕 Tiberio,R.M., and P.Zecca, Local Controllability for Autonomous Nonlinear Systems, J. Opt. Theory & Appl., 31,(1980),69－83.

〔56〕 Tonkov,E.L., Controllability of a Nonlinear System in a Linear Approximation PMM,38,(1974),599－606.

〔57〕 Tzafestas,S.G., Distributed Parameter Control Systems Theory and Application, Pergamon Press, New York,(1982).

〔58〕 Wonham, W.M. , Linear Multivariable Control : A Geometric Approach, Springer－verlag, (1979).

〔59〕 Yamamoto,Y., Controllability of Nonlinear Systems, JOTA, 22,(1979), 41－49.

〔60〕 赵怡、刘明扬，关于一类双线性系统能达性及最优控制问题，控制理论与应用，4:4, (1987),9－16。

〔61〕 Zhou,H.X., (周鸿兴) A Note on Approximate Controllability for Semilinear One－demensional Heat Equation, Appl. Math. Opt.,8, (1982), 275－285.

〔62〕 Zhou, H.X., (周鸿兴) Approximate Controllability for a Class of Semilinear Abstract Equations, SIAM J. Control & Opt., 21, (1983), 551－565.

〔63〕 Zhou.H.X., (周鸿兴) Controllability Properties of Linear and Semilinear Abstract Control Systems, Ibid.,22, (1984), 405－422.

〔64〕 Zhou. H.X., (周鸿兴) Approximate Controllability of Abstract Control Systems with Nonlinear Disturbance, Preprints of 9－th World Congress of IFAC, Budapest, Hungary, July 2－6, 5, (1984), 72－77.

〔65〕 Lions,J.L., Some Recent Trends in the Optimal Control of Distributed Systems, Preprints of The 10－th Wrold Congress of IFAC, Munich, 9. (1987), 273－278.

A Survey of Controllability Theory for Nonlinear Systems

Zhou Hongxing

(Department of Mathematics, Shangdong University, Jinan)

Zhao Yi

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

In this paper, we introduce, to a certain extent, the current results of the controllability theory for nonlinear lumped and distributed parameter control systems, analyzing the basic methods for dealing with this kind of problems and indicating the open problems in the area. There are sixty-five papers listed for reference.