第5卷 第2期
1988年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.2
June, 1988

PI和PDI补偿器设计

张福恩

（哈尔滨工业大学控制工程系）

摘　要

本文研究了多变量线性时不变系统输出比例反馈—串联积分补偿器（简称PI补偿器）和输出动态反馈—串联积分补偿器（简称PDI补偿器）在闭路系统极点任意配置条件下的设计问题。文中通过矩阵$[sI-A^{\tau}]^{-1}C^{\tau}$的右既约分解导出了闭路系统特征方程的$m\times m$多项式矩阵行列式表示式，据此建立了新的设计方法。对于PI和PDI补偿器证明了闭路系统极点可任意配置数分别为$\eta\leqslant\min\{2p+(m-1)[2p/m],\ n+m\}$和$\eta_D\leqslant\min\{\nu+\nu p+2p+(m-1)[2p/m],\ n+m+\nu\}$（$n$和$\nu$分别为系统和动态补偿器阶数，$m$为输出向量维数，$p$为控制向量维数，$[2p/m]$表示$2p/m$的整数部分，$m\leqslant p$）。并且该设计方法比已有的简单、实用。最后举例说明了它的应用。

一、引　言

给定能控能观系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx,\tag{1}$$

其中x为n维状态向量，u为p维控制向量，y为m维输出向量；A、B、C分别为相应维数的实数矩阵。假定$\mathrm{rank}B=p$，$\mathrm{rank}C=m$，$m\leqslant p$。

为了获得满意的系统动态响应，同时消除常值或慢变信号误差，抑制常值或慢变干扰作用，提高系统静态精度，通常对系统（1）引进PI补偿器。PI补偿器方程为

$$\dot{z}=r-y,\quad u=-Ky+Fz,\tag{2}$$

其中r为m维输入向量，z为m维积分补偿器状态向量。

若系统（1）能控能观，矩阵$\begin{bmatrix}A & B\\ -C & 0\end{bmatrix}$满行秩（自然要求$m\leqslant p$）。则文[1,2]分别给出了可任意配置闭路极点数为$\eta\leqslant\min\{2m+p-1,\ n+m\}$，$\eta\leqslant\min\{2p+m-1,\ n+m\}$。文[1]还证明了具有PI补偿器的闭路系统，若有一组非零极点，则矩阵F为满秩的。

若系统（1）引进PI补偿器不能实现闭路极点任意配置时，可引进PDI补偿器。PDI补偿器方程为

本文于1987年1月10日收到。1988年1月22日收到修改稿。

$$\dot{z}_1 = r - y,\quad \dot{z}_2 = Lz_2 + Ey,\quad u = -Ky + Fz_1 - Hz_2, \tag{3}$$

其中z_2为ν维动态补偿器状态向量；L、H、E分别为相应维数的待求矩阵。

PDI补偿器可以等效成PI补偿器，按照文[1,2]的方法可以推出，若系统（1）能控能观，矩阵$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$满行秩，则可任意配置闭路极点数为$\eta_D \leqslant \min\{2\nu + \max\{2m+p-1,\ 2p+m-1\},\ n+m+\nu\}$。

本文的目的是讨论 PI 和 PDI 补偿器的一种新的设计方法，这种设计方法除增加可配极点数外，同时还具有计算简单、参数选取直观、灵活等优点。

二、闭路系统特征方程的m×m矩阵行列式表示式

本节讨论具有PI和PDI补偿器的闭路系统特征方程的 $m\times m$ 多项式矩阵行列式表示式。这是下面所要讨论的设计方法的基础。

设
$$G(s) = [sI - A^\tau]^{-1}C^\tau = N(s)T(s)^{-1}, \tag{4}$$

称矩阵 $sI - A^\tau$和C^τ，矩阵$T(s)$和$N(s)$分别为$G(s)$矩阵的左和右分解。并且$T(s)$和$N(s)$分别为$m\times m$和$n\times m$的多项式矩阵。

引理 1　若系统（1）能观，则矩阵$sI - A^\tau$和C^τ为$G(s)$矩阵的左既约分解。

引理 2　假定矩阵 $sI - A^\tau$ 和 C^τ，矩阵$N(s)$和$T(s)$分别为$G(s)$矩阵的左和右既约分解，则矩阵 $sI - A^\tau$和$T(s)$除 1 以外的不变因子完全一致，因此$|sI - A^\tau|$和$|T(s)|$只相差一个常数因子。

引理 3　若P和Q分别为$n\times m$和$m\times n$维矩阵，则
$$|I_n + PQ| = |I_m + QP|. \tag{5}$$

上述三个引理见文献[3]。

考虑到$m \leqslant p$，则由方程（1）和（2）得具有PI补偿器的闭路系统特征方程为
$$\phi(s) = |sI_n - A^\tau + C^\tau[K^\tau + s^{-1}F^\tau]B^\tau| = 0。 \tag{6}$$

另由方程（1）和（3）得具有PDI补偿器的闭路系统特征方程为
$$\phi_D(s) = |sI_n - A^\tau + C^\tau[K^\tau + s^{-1}F^\tau + E^\tau[sI_\nu - L^\tau]^{-1}H^\tau]B^\tau| = 0。 \tag{7}$$

定理 1　若系统（1）能观，且矩阵$N(s)$和$T(s)$为$G(s)$ 矩阵的右既约分解，则对方程（6）和（7）分别有
$$\phi(s) = |T(s) + [K^\tau + s^{-1}F^\tau]B^\tau N(s)| = 0, \tag{8}$$

$$\phi(s) = |T(s) + [K^\tau + s^{-1}F^\tau + E^\tau[sI_\nu - L^\tau]^{-1}H^\tau]B^\tau N(s)| = 0。 \tag{9}$$

证　因为系统（1）能观，所以$sI - A^\tau$和C^τ为$G(s)$的左既约分解，并且有
$$[sI - A^\tau]^{-1}C^\tau = N(s)T(s)^{-1}。 \tag{10}$$

根据引理3和（10）式得
$$\begin{aligned}\phi(s) &= |sI_n - A^\tau| \cdot |I_n + [K^\tau + s^{-1}F^\tau]B^\tau[sI_n - A^\tau]^{-1}C^\tau| \\ &= |sI_n - A^\tau| \cdot |T(s) + [K^\tau + s^{-1}F^\tau]B^\tau N(s)| / |T(s)|。\end{aligned}$$

又由引理2知，$|sI_n - A^\tau|$和$|T(s)|$只相差一常数因子，所以（8）式成立。同理可证（9）式成立。定理证毕。

（8）和（9）式就是闭路系统特征方程的$m\times m$矩阵行列式表示式。

$[sI-A^\tau]^{-1}C^\tau$矩阵右既约分解矩阵$N(s)$和$T(s)$的简单算法见文献[4]。

三、PI补偿器设计

1）将（8）式改写成下列形式

$$\phi(s)=|sT(s)+[sK^\tau+F^\tau]B^\tau N(s)|. \qquad (11)$$

从（11）式中任取一行$sT_i(s)+[sK_i^\tau+F_i]B^\tau N(s)$。其中$T_i(s)$，$K_i^\tau$，$F_i^\tau$分别为矩阵$T(s)$，$K^\tau$，$F^\tau$的第$i$行向量。$sT_i(s)+[sK_i^\tau+F_i^\tau]B^\tau N(s)$展开为$m$维多项式行向量，其元素多项式的系数为$K_i^\tau$，$F_i^\tau$行向量计$2p$个元素的线性函数。对这一行配置一个极点需$m$个元素，配置两个极点需$2m$个元素，以此类推。对这一行最多可配置$[2p/m]$个极点。不失一般性，考虑$sT(s)+[sK^\tau+F^\tau]B^\tau N(s)$矩阵的前$m-1$行，最多可配置极点$\eta_1\leqslant(m-1)[2p/m]$个，同时确定$K_i^\tau$，$F_i^\tau(i=1,2,\cdots,m-1)$。

2）将已配定的η_1阶多项式从（11）式中提出来，得余下部分特征方程

$$\phi_1(s)=\begin{vmatrix} M(s) \\ sT_m(s)+[sK_m^\tau+F_m^\tau]B^\tau N(s) \end{vmatrix}, \qquad (12)$$

其中$M(s)$为$(m-1)\times m$维的已知多项式矩阵，$T_m(s)$，K_m^τ，F_m^τ分别为$T(s)$，K^τ，F^τ的第m行向量。将（12）式按最后一行元素展开得

$$\phi_1(s)=[sT_m(s)+[sK_m^\tau+F_m^\tau]B^\tau N(s)]\Delta, \qquad (13)$$

其中Δ为（12）式最后一行元素的代数余子式组成的m维多项式列向量。（13）式展开为$n+m-\eta_1$阶多项式，其系数为K_m^τ，F_m^τ行向量计$2p$个元素的线性函数。当$n+m-\eta_1\leqslant 2p$时，这$2p$个元素最多可组成$n+m-\eta_1$个独立系数；当$n+m-\eta_1>2p$时，这$2p$个元素最多可组成$2p$个独立的系数。可以证明，对（13）式可配置极点数等于其独立系数数，因此对（13）式可配置极点数$\eta_2\leqslant\min\{2p,\ n+m-\eta_1\}$。上述两步总共可配置极点数$\eta\leqslant\min\{2p+(m-1)[2p/m],\ n+m\}$。至此也就完成了PI补偿器设计。

四、PDI补偿器设计

1）设

$$E^\tau=[E_1^\tau,0,\cdots,0],\ E_1=[e_{11}\ e_{12},\cdots,e_{1m}], \qquad (14)$$

$$H=[H_1,H_2,\cdots,H_\nu],\qquad H_i^\tau=[h_{1i},h_{2i},\cdots,h_{pi}],\tag{15}$$

$$L^\tau=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 1 \\ -l_\nu & -l_{\nu-1} & & \cdots & -l_1 \end{pmatrix}.\tag{16}$$

计算

$$r_0(s)=|sI_\nu-L^\tau|=s^\nu+l_1s^{\nu-1}+l_2s^{\nu-2}+\cdots+l_\nu,\tag{17}$$

$$\mathrm{adj}[sI_\nu-L^\tau]=\begin{pmatrix} r_1(s) & r_2(s) & \cdots & r_\nu(s) \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix},\tag{18}$$

$$r_i(s)=s^{\nu-i}+l_1s^{\nu-i-1}+\cdots+l_{\nu-i}\quad(i=1,2,\cdots,\nu).\tag{19}$$

（18）式中星号＊所代表的元素对下面的计算无用。将（14）、（15）、（17）、（18）式代入（9）式得

$$\phi_D(s)=\left|T(s)+\left[K^\tau+s^{-1}F^\tau+E_1^\tau\left(\sum_{i=1}^{\nu}H_i^\tau r_i(s)\right)/r_0(s)\right]B^\tau N(s)\right|.\tag{20}$$

取$e_{11}=e_{12}=\cdots=e_{1m-1}=0$，$e_{1m}=1$（$e_{1m}$可取任意实数，为了方便取$e_{1m}=1$）。代入(20)式，整理得

$$\phi_D(s)=\left|\begin{array}{l} sT_0(s)+[sK_0^\tau+F_0^\tau]B^\tau N(s) \\ \hline sT_m(s)r_0(s)+\left[sK_m^\tau r_0(s)+F_m^\tau r_0(s)\right. \\ \qquad\left.+s\sum_{i=1}^{\nu}H_i^\tau r_i(s)\right]B^\tau N(s) \end{array}\right|,\tag{21}$$

其中$T_0(s)$，K_0^τ，F_0^τ分别为$T(s)$，K^τ,F^τ的前$m-1$行组成的矩阵。

2）按照上节的步骤1）对（21）式的前$m-1$行可配置极点数$\eta_1\leqslant(m-1)[2p/m]$，同时确定$K_0^\tau$，$F_0^\tau$矩阵。

3）将已配定的η_1阶多项式从（21）式中提出来得余下部分特征方程，经整理后为

$$\phi_{D1}(s)=\left|\begin{array}{l} \qquad M(s) \\ \hline (s)T_M(s)r_0(s)+\left\{s\left[K_m^\tau r_0(s)+(F_m^\tau+H_1^\tau)r_1(s)\right.\right. \\ \qquad\left.\left.+\sum_{j=2}^{\nu}H_j^\tau r_j(s)\right]+l_\nu F_m^\tau\right\}B^\tau N(s) \end{array}\right|.\tag{22}$$

设

$$[M_0, M_1, \cdots, M_{\nu+1}] = [K_m^\tau,\ F_n^\tau + H_1^\tau, H_2^\tau, \cdots, H_\nu^\tau, l_\nu F_m^\tau] S(l), \tag{23}$$

其中

$$S(l) = \begin{pmatrix} 0 & l_\nu & l_{\nu-1} & \cdots & l & 1 \\ & l_{\nu-1} & l_{\nu-2} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

显然，$S(l)$为非奇异矩阵。

考虑到（23）式，将（22）式按最后一行元素展开得

$$\phi_{D1}(s) = \left[sT_m(s) r_0(s) + \left(\sum_{j=0}^{\nu+1} M_j s^j \right) B^\tau N(s) \right] \Delta. \tag{25}$$

（25）式展开为$n+m+\nu-\eta_1$阶多项式，其系数为 $l_i(i=1,2,\cdots,\nu)$和 p 维行向量$M_j(j=0,1,\cdots,\nu+1)$元素计$\nu+\nu p+2p$个参数的线性函数。按照上节步骤2）对（25）式可任意配置闭路极点数 $\eta_2 \leqslant \min\{\nu+\nu p+2p, n+m+\nu-\eta_1\}$，同时确定参数 l_i 和行向量 M_j，然后再根据（23）式确定 K_m^τ，F_m^τ，H_1^τ，…，H_ν^τ诸行向量，至此完成了 PDI 补偿器设计。总共可任意配置闭路极点数 $\eta_D \leqslant \min\{\nu+\nu p+2p+(m-1)[2p/m],\ n+m+\nu\}$。

注 1 由（21）和（23）式可得

$$K^\tau + s^{-1}F^\tau + E\cdot[sI_\nu - L^\tau]^{-1}H^\tau = \begin{bmatrix} K_0^\tau + s^{-1} F_0^\tau \\ \left(\sum_{j=0}^{\nu+1} M_j s^j \right) / s r_0(s) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

注 2 当需要将（21）式的第m行加到第 i 行，然后配置第 i 行极点时，应取 $e_{1i} = -e_{1m}$，以保证对第 i 行配置极点与$\left(\sum_{i=1}^{\nu} H_i r_i(s) \right) / r_0(s)$无关。

五、例 题

例 1 给定能控能观系统参数矩阵为（该例取自文献[1,2]，但阶数增加1）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

设计PI补偿器，使其闭路极点为-1，-2，-2，-3，-4，-5。

1）利用文〔4〕给出的方法计算得

$$T(s)=\begin{bmatrix}0 & -s^2+1\\(s-1)^2 & s^2+3s+2\end{bmatrix},\quad N(s)=\begin{bmatrix}0 & s-1 & 2 & 0\\-s-1 & s+1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\tau}. \tag{28}$$

$$K^{\tau}+s^{-1}F^{\tau}=\begin{bmatrix}k_{11}+f_{11}s^{-1} & k_{21}+f_{21}s^{-1}\\k_{12}+f_{12}s^{-1} & k_{22}+f_{22}s^{-1}\end{bmatrix}, \tag{29}$$

得闭路系统特征多项式为

$$(s)=\begin{vmatrix}2k_{11}s^2+2(k_{21}+f_{11})s+2f_{21} & -s^3+k_{11}s^2+(k_{11}+k_{21}+f_{11}+1)s+f_{11}+f_{21}\\ s^3+2(k_{12}-1)s^2+(2k_{22}+2f_{12}+1)s+2f_{22} & s^3+(k_{12}+3)s^2+(k_{12}+k_{22}+f_{12}+2)s+f_{12}+f_{22}\end{vmatrix}。 \tag{30}$$

2）对上式第一行配置极点 -1，-2，则得

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1 & 0 & 0\\-2 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{11}\\f_{11}\\k_{21}\\f_{21}\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\-3\\0\end{pmatrix}. \tag{31}$$

解方程（31）得

$$\begin{bmatrix}k_{11}\\k_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\12\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}f_{11}\\f_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\12\end{bmatrix},\quad a=-9,$$

并得余下部分特征多项式为

$$\phi_1(s)=\begin{vmatrix}12 & -s+9\\ s^3+2(k_{12}-1)s+(2k_{22}+2f_{12}+1)s+2f_{22} & s^3+(k_{12}+3)s^2+(k_{12}+k_{22}+f_{12}+2)s+f_{12}+f_{22}\end{vmatrix}. \tag{32}$$

已知

$$(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)=s^4+14s^3+71s^2+154s+120, \tag{33}$$

将（32）式展开，并令（32）和（33）式中 s 同次幂系数相等得

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\-6 & 2 & 2 & 0\\12 & -6 & -6 & 2\\0 & 12 & 0 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{12}\\f_{12}\\k_{22}\\f_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\16\\139\\120\end{pmatrix}. \tag{34}$$

解方程（34），最后得

$$K=\begin{bmatrix}6 & 6.5\\12 & -39\end{bmatrix},\qquad F=\begin{bmatrix}6 & 66.5\\12 & 113\end{bmatrix}.$$

例 2 已知能控能观系统参数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&-6\\0&1&0&0&-30\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&0\\5&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad C=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1]. \qquad (35)$$

设计PDI补偿器

取 $\nu=1$，则$\eta_D\leqslant 7$。取闭路极点为 -1，-1，-1，-1，-3，-3，-3。

$$T(s)=s^5+s^4+3s^3+30s^2+6s,$$
$$N(s)=[1\quad s\quad s^2\quad s^3\quad s^4]. \qquad (36)$$

设

$$K^\tau+s^{-1}F^\tau+E^\tau[sI_\nu-L^\tau]^{-1}H^\tau=\frac{M_2s^2+M_1s+M_0}{s(s+l)}, \qquad (37)$$

其中

$$[M_0\quad M_1\quad M_2]=[m_{01}\quad m_{02}\mid m_{11}\quad m_{12}\mid m_{21}\quad m_{22}], \qquad (38)$$

则得闭路系统特征多项式

$$\begin{aligned}\phi_D(s)=s^7&+(l+m_{22}+1)s^6+(l+m_{12}+3)s^5\\&+(3l+m_{22}+30)s^4+(30l+5m_{21}+6)s^3\\&+(6l+5m_{11}-3m_{21})s^2+(5m_{01}-3m_{11})s-3m_{01}.\end{aligned} \qquad (39)$$

已知

$$\begin{aligned}(s+1)^4(s+3)^3=s^7&+13s^6+69s^5+193s^4+307s^3\\&+279s^2+135s+27,\end{aligned} \qquad (40)$$

由（39）和（40）得

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\3&0&0&0&0&1\\30&5&0&0&0&0\\6&-3&5&0&0&0\\0&0&-3&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\m_{21}\\m_{11}\\m_{01}\\m_{22}\\m_{12}\\m_{02}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\66\\163\\301\\279\\135\\27\end{pmatrix}. \qquad (41)$$

解方程（41），得

$l=31.65$

$$[M_0\quad M_1\quad M_2]=[-9\quad 68.05\mid -60\quad 34.35\mid 129.7\quad -19.65]. \qquad (42)$$

进一步计算得

$$K=\begin{bmatrix}129.7\\-19.65\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}-0.28\\2.14\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}-4164.72\\654.16\end{bmatrix}.$$

并得动态补偿器方程

$$\dot{z}_2 = -31.65 z_2 + y, \tag{43}$$

$$u_2 = -\begin{bmatrix} 129.7 \\ -19.65 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} -4164.72 \\ 654.16 \end{bmatrix} z_2$$

及其传递函数为

$$H(s) = \frac{1}{s+31.65}\begin{bmatrix} 129.7s - 59.72 \\ -19.65s - 32.19 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

参 考 文 献

〔1〕 S. Novin-Hirbod., Pole Assignment Using Proportional-plus-integral Output Feedback Control, INT. J. Control, 29:6, (1979), 1035-1046.

〔2〕 Seraji, H., Design of Proportional-plus-integral Controllers for Multivariable Systems, INT. J. Control, 29:1, (1979), 49-63.

〔3〕 (日)须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，北京,(1979).

〔4〕 张福恩，状态反馈极点配置的新方法，自动化学报，12:2，(1986)，162-167.

Design of PI and PDI Compensators

Zhang Fuen
(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology)

Abstract

This paper deas with the problem of arbitrary assigning closed-loop poles in linear multivariable time-invariant systems by using output proportional feedback-serial integral compensator (PI compensator) and output dynamic feedback-serial interal compensator (PDI compensator) respectively, Determinant expressions of $m \times m$ polynomial matrix for characterictic equation are developed by right reduced factorizations of matrix $[sI - A^\tau]^{-1} C^\tau$. Based on the expressions, a new design method both simpler and more practical than hitherto is given. It is shown that the number $\eta \leqslant \min\{2p + (m-1)[2p/m], n+m\}$ and $\eta_D \leqslant \min\{\nu + \nu p + 2p + (m-1)[2p/m], n+m+\nu\}$ of closed loop poles are arbitrarily assignable by using PI and PDI compensators respectively (where n and ν are the orders of the system and the dynamic compensator respectively p and m are the dimension of the control and output vectors and $[2p/m]$ means the integer part of $2p/m$, $m \leqslant p$).

Applictions are shown in the examples