第5卷 第3期
1988年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.3
Sept., 1988

利用矩阵变换求n个多项式的最大公因式及判断复常系数线性系统的稳定性

开平安
（中国科学院能源研究所，北京）

徐晖
（安徽铜陵市科学技术协会）

摘要

本文给出通过矩阵变换的方法求n个多项式最大公因式以及判断复常系数线性系统的稳定性判据，这些算法是很简单的，改进了传统的欧几里德算法和胡维茨算法.

一、引论

在数学上和多变量系统设计中往往要计算许多多项式的最大公因式. 计算2个多项式的最大公因式，用辗转除法，但计算许多多项式的最大公因式用辗转除法就显得很复杂了，为此，本文给出一种用矩阵变换求多个多项式最大公因式的简便算法.

工程师们对系统的稳定性是非常关心和感兴趣的，但对一大类实际系统具有复常系数的工程稳定性却研究不多，为此本文给出通过矩阵变换法判断复常系数线性系统的稳定性判据.

为了说明这些算法，我们采用以下符号.

1. 在一元多项式环$P[x]$上的n个、最高次数为$m-1$的多项式

$f_\mu(x)=\sum_{v=1}^{m} f_{\mu v}x^{m-v}$ （$\mu=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2,m\geqslant 3$，至少有一$f_\mu(x)$中$f_{\mu m}\neq 0$），记为

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = F_{m\times n}\cdot \vec{X},$$

其中

$$F_{n\times m}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12}\cdots f_{1m} \\ f_{21} & f_{22}\cdots f_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{n1} & f_{n2}\cdots f_{nm} \end{pmatrix}$$ 为n个多项式的系数矩阵，

本文于1987年8月26日收到，1988年1月13日收到修改稿，

$f_\mu = [f_{\mu 1}\ f_{\mu 2} \cdots f_{\mu m}]$ 为$F_{n\times m}$的第μ行，$\mu=1,2,\cdots,n$,

$\overline{X}=[x^{m-1},x^{m-2},\cdots x\ \ 1]^T$。

2. $T_{n\times n}[i(-k_i)]\cdot F_{n\times m}$：对系数阵$F_{n\times m}$的右移位运算。如果$F_{n\times m}$的第$i$行从右至左按顺序数连续有$k_i$个零，则$T_{n\times n}[i(-k_i)]\cdot F_{n\times m}$表示把$F_{n\times m}$的第$i$行不为零的元素按顺序从左向右移动$k_i$个位置。例如：

$$F_{3\times 4}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \end{pmatrix},$$

$$T_{3\times 3}[2(-2)]\cdot F_{3\times 4}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ 0 & 0 & f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \end{pmatrix}.$$

3. $T_{n\times n}[i(k_i)]\cdot F_{n\times m}$：定义类似于$T_{n\times n}[i(-k_i)]$，对$F_{n\times m}$的左移位运算。

4. $L_{n\times n}(i,j)$：初等矩阵，把单位阵$I_{n\times n}$的第i行与第j行互换。

5. $L_{n\times n}(i(c_i))$：初等矩阵，以数域P中的非零数c_i乘以单位阵$I_{n\times n}$的第i行。

6. $L_{n\times n}(i,j(k_{ij}))$：初等矩阵，把单位阵$I_{n\times n}$的第$j$行的$k_{ij}$倍加到第$i$行。

7. $L_{n\times n}(i(x^{k_i}))$, $L_{n\times n}(i(x^{-k_i}))$：表示用$x^{k_i}$，$x^{-k_i}$分别乘以单位阵$I_{n\times n}$的第$i$行。$k_i$为正整数，$0<k_i<m-1$。

8. $L_{n\times n}(i,j(-g_{ij}(x)))$：其中$g_{ij}(x)=c_kx^k+c_{k-1}x^{k-1}+\cdots+c_1x+c_0$为一多项式

$$L_{n\times n}(i,j(-g_{ij}(x)))=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1\cdots & -g_{ij}(x) & \\ & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

二、算法及其原理

引理 1 如果 $\overrightarrow{X}=[x^{m-1},x^{m-2},\cdots x\ \ 1]^T$

$$F_{n\times m}=\begin{pmatrix} & & f_1 & & \\ & & \vdots & & \\ & & f_{i-1} & & \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots f_{i,m-k_i} & 0 & 0\cdots 0 \\ & & \vdots & & \\ & & f_n & & \end{pmatrix}_{n\times m},$$

$L_{n\times n}(i(x^{-k_i}))\cdot F_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}=F^*_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}$，则

$$F^*_{n\times m}=\begin{bmatrix} & & & f_1 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & f_{i-1} & & \\ 0 & 0\cdots 0 & f_{i1} & f_{i2}\cdots f_{i,m-k_i} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & f_n & & \end{bmatrix}_{n\times m}$$ 以及

$$L_{n\times n}(i(x^{-k_i}))\cdot F_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}=F^*_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}\Longleftrightarrow T_{n\times n}[i(-k_i)]\cdot F_{n\times m}=F^*_{n\times m}$$

证　$L_{n\times n}(i(x^{-k_i}))\cdot F_{n\times m}\overrightarrow{X}$

$$=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_{i-1}(x) \\ f_{i1}x^{m-1-k_i}+f_{i2}x^{m-2-k_i}+\cdots+f_{i,m-k_i} \\ \vdots \\ f_n(x)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} & & & f_1 & \\ & & & \vdots & \\ & & & f_{i-1} & \\ 0 & 0\cdots 0 & f_{i1} & f_{i2}\cdots\cdots f_{i,m-k_i} & \\ & & & \vdots & \\ & & & f_n & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{m-1} \\ x^{m-2} \\ \vdots \\ x \\ 1\end{bmatrix}$$

$$=F^*_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}.$$

$F^*_{n\times m}$即为定理中的形式，显然可记为

$$L_{n\times n}(i(x^{-k_i}))\cdot F_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}=F^*_{n\times m}\overrightarrow{X}\Longleftrightarrow T_{n\times n}[i(-k_i)]\cdot F_{n\times m}=F^*_{n\times m}$$

引理 2　如果$\overrightarrow{X}=[x^{m-1},x^{m-2},\cdots x\quad 1]^T$，

$$F_{n\times m}=\begin{bmatrix} & & f_1 & \\ & & \vdots & \\ & & f_{i-1} & \\ 0 & 0\cdots 0 & f_{i,k_i+1},f_{i,k_i+2}\cdots f_{im} & \\ & & \vdots & \\ & & f_n & \end{bmatrix}_{n\times m},$$

则　$L_{n\times n}(i(x^{k_i}))\cdot F_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}=F^*\overrightarrow{X}\Longleftrightarrow T_{n\times n}[i(k_i)]\cdot F_{n\times m}=F^*_{n\times m}$，

其中

$$F^*_{n\times m}=\begin{pmatrix} & f_1 & \\ & \vdots & \\ & f_{i-1} & \\ f_{i,k_i+1},f_{i,k_i+2}\cdots f_{im} & 0 & 0\cdots 0\\ & \vdots & \\ & f_n & \end{pmatrix}_{n\times m}。$$

证　证明类似于引理1的证明。

定理 1　若$d(x)=x^q+d_{m-q+1}x^{q-1}+\cdots+d_{m-1}x+d_m$是$n$个，最高次数为$m-1$的多项式$F_{n\times m}\cdot\vec{X}$的最大公因式，则有多项式矩阵$L_{n\times n}(x)$，使得

$$L_{n\times n}(x)\cdot F_{n\times m}\cdot\vec{X}=\begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & 0\cdots 0 & 1\ d_{m-q+1}\cdots d_{m-1}\quad d_m\end{pmatrix}_{n\times m}\begin{pmatrix}x^{m-1}\\x^{m-2}\\\vdots\\x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\d(x)\end{pmatrix}$$

证　设$g_l(x),r_l(x),(l=1,2\cdots s+1)$为$p(x)$中次数小于$f_1(x)$和$f_2(x)$的多项式。在$n=2$时，由辗转除法求$f_1(x)$和$f_2(x)$的最大公因式写成矩阵变换的形式如下：

$$f_1(x)=f_2(x)g_1(x)+r_1(x)\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -g_1(x)\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1(x)\\f_2(x)\end{pmatrix},$$

$$f_2(x)=r_1(x)g_2(x)+r_2(x)\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\-g_2(x) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1(x)\\f_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1(x)\\r_2(x)\end{pmatrix},$$

$$\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots$$

$$r_{s-2}(x)=r_{s-1}(x)g_s(x)+r_s(x)\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\-g_s(x) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{s-1}(x)\\r_{s-2}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_{s-1}(x)\\r_s(x)\end{pmatrix},$$

$$r_{s-1}(x)=g_{s+1}(x)r_s(x)+0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -g_{s+1}(x)\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_{s-1}(x)\\r_s(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\r_s(x)\end{pmatrix}.$$

由辗转除法可知：$r_s(x)$就是$f_1(x)$和$f_2(x)$的最大公因式$d_o(x)$，设其一般形式为$r_s(x)=d_o(x)=x^\alpha+d_{m-\alpha+1}x^{\alpha-1}+\cdots+d_{m-1}x+d_m$。从上面辗转除法的等价矩阵变换关系有

$$L_{2\times 2}(1,2(-g_{s+1}(x)))\cdot L_{2\times 2}(2,1(-g_s(x)))\cdots L_{2\times 2}(1,2(-g_1(x)))\cdot F_{2\times m}\vec{X}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ \\r_s(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ \\ 0\ 0\cdots 0\ 1\ d_{m-\alpha+1}\cdots d_{m-1}\ \ d_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{m-1}\\x^{m-2}\\\vdots\\x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \\d_o(x)\end{pmatrix},$$

即 $$L_{2\times2}(x)F_{2\times m}\cdot\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}0\\ d_0(x)\end{pmatrix},$$

其中，
$$L_{2\times2}(x)=\begin{pmatrix}l_{11}(x) & l_{12}(x)\\ l_{21}(x) & l_{22}(x)\end{pmatrix}=\prod_l L_{2\times2}(i,j(-g_l(x))),$$
$$d_0(x)=l_{21}(x)f_1(x)+l_{22}(x)f_2(x)。$$

由于$g_l(x)$为多项式，$l=1,2,\cdots,s+1$，所以易证$L_{2\times2}(x)$为多项式阵．设在$n=k-1$时，命题成立，且$d_1(x)$为$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{k-1}(x)$的最大公因式．在$n=k$时$d_1(x)$与$f^k(x)$的最大公因式为$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{k-1}(x),f_k(x)$的最大公因式$d(x)$，求$d_1(x)$与$f_k(x)$最大公因子相当前面所证的$n=2$时的情况，所以在$n=k$时命题成立．即，若$d(x)=x^q+d_{m-q+1}x^{q-1}+\cdots+d_m$为最大公因式，则存在多项式矩阵$L_{n\times n}(x)$

$$L_{n\times n}(x)=\begin{pmatrix}l_{11}(x)\cdots l_{1n}(x)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ l_{n1}(x)\cdots l_{nn}(x)\end{pmatrix}=\prod_{\{i,j\}}L_{n\times n}(i,j(-g_{ij}(x)))\text{，使得}$$

$$L_{n\times n}(x)\cdot F_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ 0 & 0\cdots0 & 1 & d_{m-q+1}\cdots d_{m-1} & d_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{m-1}\\ x^{m-2}\\ \vdots\\ x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\ d(x)\end{pmatrix}.$$

定理 2　若n个，最高次数为$m-1$的多项式$F_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}$互质，则有多项式矩阵$L_{n\times n}(x)$，使得

$$L_{n\times n}(x)\cdot F_{n\times m}\cdot\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix} & & 0 & \\ 0 & 0\cdots\cdots0 & & 1\end{pmatrix}_{n\times m}\cdot\begin{pmatrix}x^{m-1}\\ x^{m-2}\\ \vdots\\ x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\ 1\end{pmatrix}$$

证　这是定理1的直接结果.

定理 3　通过对$F_{n\times m}$的行变换和移位运算，能够把$F_{n\times m}$变换成F_{s+1}

$$F_{s+1}=\begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ 0 & 0\cdots0 & 1 & d_{m-q+1}\cdots d_{m-1} & d_m\end{pmatrix}_{n\times m}\quad\text{（定理1中的形式）}$$

或者把$F_{n\times m}$变换成F^*_{s+1}

$$F^*_{s+1}=\begin{pmatrix} & & 0 & \\ 0 & 0\cdots0 & & 1\end{pmatrix}_{n\times m}\quad\text{（定理2中的形式）}$$

证　在定理1中已证明多项式矩阵

$$L_{n\times n}(x)=\prod_{\{i,j\}}L_{n\times n}(i,j(-g_{ij}(x))).$$

容易证明

$$L_{n\times n}(i,j(-g_{ij}(x)))=L_{n\times n}(i,j(-c_kx^k))\cdots L_{n\times n}(i,j(-c_1x))\cdot L_{n\times n}(i,j(-c_0))$$
$$=\prod_{l=0}^{k}L_{n\times n}(i,j(-c_lx^l)),$$

以及

$$L_{n\times n}(i,j(-c_lx^l))=\begin{array}{c}\left(\begin{matrix}1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & -c_lx^l & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{matrix}\right)_{n\times n}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \cdots 第\, i\, 行\\ \\ \cdots 第\, j\, 行\\ \\ \\ \end{array}$$

$$=L_{n\times n}(j(x^{-l}))\cdot L_{n\times n}(i,j(-c_l))\cdot L_{n\times n}(j(x^l)),\ l=0,1,2,\cdots,k.$$

所以，从引理 1 和引理 2 可得

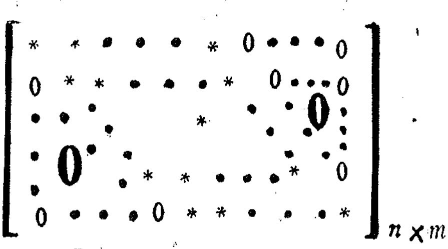
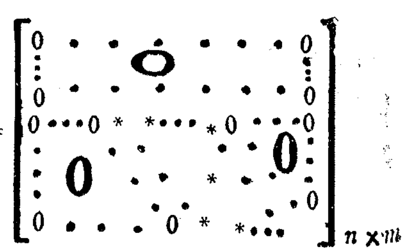
$$L_{n\times n}(i,j(-c_lx^l))\cdot F_{n\times m}\cdot\vec{X}\Longleftrightarrow T_{n\times n}[j(-l)]L_{n\times n}(i,j(-c_l))\cdot T_{n\times n}[j(l)]\cdot F_{n\times m},$$

$$L_{n\times n}(i,j(-g_{ij}(x)))\cdot F_{n\times m}\cdot\vec{X}\Longleftrightarrow\prod_{l=0}^{k}(T_{n\times n}[j(-l)]\cdot L_{n\times n}(i,j(-c_l))\cdot T_{n\times n}[j(l)])F_{n\times n}.$$

并且上式右边( )内的运算关于 l 是可以任意互换位置的. 由此证明所给出的矩阵变换求 n 个多项式最大公因式或判断其互质的方法如下:

(1) 对 $F_{n\times m}$ 进行行消除变换，把 $F_{n\times m}$ 变换成 F_1，即 $\prod_s Q_s\cdot F_{n\times m}=F_1$，其中

$$Q_s\in\{L_{n\times n}(i,j),L_{n\times n}(i(c_i)),L_{n\times n}(i,j(k_{ij}))\},i,j=1,2,\cdots,n.$$

$F_1=$  或 $F_1=$ 

其中 “*” 一般表示非零元素. 例如 3 个多项式

$f_1(x)=x^5+2x^4+3x^3-7x^2-14x-21$，$f_2(x)=2x^4+4x^3+7x^2+2x+3$，

$f_3(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3$， 记为

$$F_{3\times 6}\cdot\vec{X}=\begin{pmatrix}1&2&3&-7&-14&-21\\0&2&4&7&2&3\\0&1&2&2&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^5\\x^4\\x^3\\x^2\\x\\1\end{pmatrix}.$$

对$F_{3\times 6}$的行变换如下：

$$L_{3\times 3}(1,3(7))\cdot L_{3\times 3}(2,3(-1))\cdot L_{3\times 3}\left(3\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\cdot L_{3\times 3}\left(3,2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot F_{3\times 6}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&0&0&0\\0&2&4&6&0&0\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}=F_1.$$

（2）对F_1进行左移位运算，即 $\prod T_{n\times n}[i(k_i)]\cdot F_1=F_2$ $\quad i\in\{1,2,\cdots,n\}$

其中，F_1第i行从左向右连续有k_i个零，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$

$$F_2=\begin{pmatrix}*&*\cdots&*&\\\vdots&*&\vdots&0\\*&*\cdots&*&\end{pmatrix}_{n\times m}.$$

例如在前例中

$$T_{3\times 3}[2(1)]\cdot T_{3\times 3}[3(3)]\cdot F_1=\begin{bmatrix}1&2&3&0&0&0\\2&4&6&0&0&0\\1&2&3&0&0&0\end{bmatrix}=F_2.$$

（3）重复进行（1），（2）的变换，即对$F_{n\times m}$不断进行行（消除）变换和移位变换，则会出现下面两种情况：

（3.1）如果在对$F_{n\times m}$的一系列变换后，出现一个各行（除了某些行全为零外）全都线性相关的矩阵，记为F_{s-2}，

$$F_{s-2}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1,q+1}&\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2,q+1}&0\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{n,q+1}&\end{pmatrix}_{n\times m}\text{或者}\quad F_{s-2}=\begin{pmatrix}0&\\a_{11}\cdots a_{1,q+1}&\\\vdots\qquad\vdots&0\\a_{n1}\cdots a_{n,q+1}&\end{pmatrix}_{n\times m}$$

由于F_{s-2}各行全都线性相关，所以下面的变换成立

$$L_{s-1}\cdot F_{s-2}=F_{s-1},$$

其中，$L_{s-1}=L_{n\times n}\left(1,n\left(-\frac{a_{11}}{a_{n1}}\right)\right)\cdot L_{2\times 2}\left(2,n\left(-\frac{a_{21}}{a_{n1}}\right)\right)\cdots$

$$\cdot L_{n\times n}\left(n-1,n\left(-\frac{a_{n-1,1}}{a_{n1}}\right)\right),$$

$$F_{s-1}=\begin{bmatrix} & & 0 & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{n,q+1} & & 0\cdots 0\end{bmatrix}_{n\times m}.$$

例如前例中， $F_{s-2}=F_2=\begin{bmatrix}1&2&3&0&0&0\\2&4&6&0&0&0\\1&2&3&0&0&0\end{bmatrix}$，对它变换如下：

$$L_{3\times 3}(1,3(-1))\cdot L_{3\times 3}(2,3(-2))\cdot F_{s-2}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&2&3&0&0&0\end{bmatrix}=F_{s-1}.$$

对F_{s-1}进行右移位变换，即$T_{n\times n}[n(-k_n)]F_{s-1}=F_s$，

其中，
$$F_s=\begin{bmatrix} & & 0 & \\ 0 & 0\cdots 0 & a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{n,q+1}\end{bmatrix}_{n\times m}.$$

在前例中， $T_{3\times 3}[3(-3)]\cdot F_{s-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&2&3\end{bmatrix}$，

若$a_{n1}\neq 1$，则进行变换：

$$L_{n\times n}\left(n\left(\frac{1}{a_{n1}}\right)\right)\cdot F_s=F_{s+1},$$

$$F_{s+1}=\begin{bmatrix} & & & 0 & & \\ 0 & 0\cdots 0 & 1 & d_{m-q+1}\cdots d_{m-1} & & d_m\end{bmatrix}_{n\times m}$$

即为所要证明的形式。

在前例中$F_s=F_{s+1}$，所以这3个多项式的最大公因式$d(x)=[0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3]\cdot[x^5,x^4,x^3,x^2,x\quad 1]^T=x^2+2x+3$。

（3.2）如果$F_{n\times m}$的每一个变换阵中都有线性无关的行，则$F_{n\times m}$总能变换成下面的形式

$$\begin{bmatrix}0 & \\ I & 0\end{bmatrix}_{n\times m}=\begin{bmatrix} & 0 & \\ \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & 0 & 0\end{bmatrix}_{n\times m}.$$

对此阵施以$T_{n\times n}[i(-k_i)]$的右移位变换，（$i\in\{1,2\cdots n\}$）它能变成

$$\begin{bmatrix} & 0 & \\ 0\cdots\cdots 0 & & 1\\ \vdots\qquad\vdots & & \vdots\\ 0\cdots\cdots 0 & & 1\end{bmatrix}_{n\times m}.$$

它的非零行也都线性相关，它显然能变换成

$$\begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

此定理的证明也就提供了用矩阵变换法求n个多项式最大公因子的算法，变换程序可以视$F_{n\times m}$不同而改变，只要能把$F_{n\times m}$变换成定理中的形式就行了，因为最大公因式是唯一的。

定理4　线性复常系数系统的特征多项式$f(x)=x^m+(a_1+jb_1)x^{m-1}+(a_2+jb_2)x^{m-2}+\cdots+a_m+jb_m$的全部零点位于复平面的左半面内的充分必要条件是，在对多项式$f_1(x)=x^m+jb_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+q$和$f_2^*(x)=xf_2(x)=x(a_1x^{m-1}+jb_2x^{m-2}+a_3x^{m-2}+\cdots+s)$

的系数阵$F=\begin{bmatrix} 1 & b_1 & a_2 & \cdots & q \\ a_1 & b_2 & a_3 & \cdots s & 0 \end{bmatrix}$交替进行变换，$T_{2\times 2}[1(1)]\cdot L_{2\times 2}(1,2(-k_i))T_{2\times 2}[1(1)]\cdot L_{2\times 2}(1,2(-c_i))$（消除第1行2个非零元素）与$T_{2\times 2}[2(1)]\cdot L_{2\times 2}(2,1(-k_i'))\cdot T_{2\times 2}[2(1)]\cdot L_{2\times 2}(2,1(-c_i'))$（消除第2行的两个非零元素）所得的形如

$$\begin{pmatrix} \overset{(l)}{d_l} & *\cdots * & 0\cdots 0 \\ 0 & *\cdots * & 0\cdots 0 \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 0 & *\cdots * & 0\cdots 0 \\ \overset{(l)}{\beta_l} & *\cdots * & 0\cdots 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵列$\overset{(l)}{F}$中，第一列的非零元素$\overset{(l)}{\alpha_l}$，$\overset{(l)}{\beta_l}$，$(l=1,2,\cdots m)$全为正。这里F中的元素q、s按如下办法确定：当m为偶数时，$q=a_m$，$s=b_m$；当m为奇数时，$q=b_m$，$s=a_m$，$\overset{(l)}{F}$的求法见本定理的证明。

证　根据Frank定理（E·Frank，1946）：$f(x)=x^m+(a_1+jb_1)x^{m-1}+(a_2+jb_2)x^{m-2}+\cdots+a_m+jb_m$的全部零点位于复平面的左半面内，当且仅当在公式

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{x^m+jb_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+q}{a_1x^{m-1}+jb_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\cdots+s}$$

$$=c_1x+jk_1+\cfrac{1}{c_2x+jk_2+\cfrac{1}{c_3x+jk_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{c_mx+jk_m}}}}=(\delta)$$

中，$c_l,k_l>0,c_l,k_l\in R$，$l=1,2,\cdots,m$。

计算c_l和k_l的过程能够写成矩阵的形式：

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=c_1x+\frac{f_3(x)}{f_2(x)}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}1 & -c_1x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}f_3(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix},\tag{1}$$

$$\frac{f_3(x)}{f_2(x)}=jk_1+\frac{f_4(x)}{f_2(x)}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -jk_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_3(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_4(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix},\tag{2}$$

$$\frac{f_2(x)}{f_4(x)}=c_2x+\frac{f_5(x)}{f_4(x)}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ -c_2x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_4(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_4(x)\\ f_5(x)\end{pmatrix},\tag{3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{f_{2m+1}^{(x)}}{f_{2m}^{(x)}}=jk_m\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ -jk_m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{2m}^{(x)}\\ f_{2m+1}^{(x)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{2m}^{(x)}\\ 0\end{pmatrix}.\tag{m}$$

这里假定m为偶数，（以下同），奇数时类似可以导出。

因为，$\begin{pmatrix}1 & -c_lx\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -c_l\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=L_{2\times2}(2(x^{-1}))\cdot L_{2\times2}(1,2(-c_l))\cdot L_{2\times2}(2(x))$，$l=1,2,\cdots,m$。

并且，

$$\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & jb_1 & a_2\cdots q\\ 0 & a_1 & ib_2\cdots s\end{pmatrix}\cdot\vec{X}_0,\ \vec{X}_0=[x^m,x^{m-1},\cdots,t]^T,\ \begin{cases}t=1, & m\text{为偶数。}\\ t=j, & m\text{为奇数。}\end{cases}$$

记与（1），（2）…（m）式完全等价的矩阵变换过程为L^*F，可以推导出：（见插页）

$$L^*=L_{2\times2}(2,1(-k_m))\cdots L_{2\times2}(2,1(-k_2))\cdot T_{2\times2}[1(-1)]\cdot L_{2\times2}(2,1(-c_2))\cdot T_{2\times2}[1(1)]\cdot L_{2\times2}(1,2(-k_1))\cdot T_{2\times2}[2(-1)]\cdot L_{2\times2}(1,2(-c_1)).$$

在Frank定理中，要求$c_l,k_l>0$，即$-c_l,-k_l<0$，$l=1,2,\cdots,m$。所以，每一对：$\overset{(1)}{\alpha_1}$与$\overset{(1)}{\beta_1}$；$\overset{(2)}{\alpha_2}$与$\overset{(1)}{\beta_1}$；$\overset{(2)}{\alpha_2}$与$\overset{(2)}{\beta_2}$；…；$\overset{(m)}{\alpha_m}$与$\overset{(m)}{\beta_m}$必须同号。因为$-c_1<0$，1与a_1应同号，$1>0\Rightarrow a_1>0$；$a_1=\overset{(1)}{\beta_1}>0\Rightarrow\overset{(1)}{\alpha_1}>0$，$\overset{(2)}{\alpha_2}>0$，…等等，所以$\overset{(l)}{\alpha_l}$，$\overset{(l)}{\beta_l}>0$，$l=1,2,\cdots,m$。另一方面，注意到$L^*F$与$LF$变换中，所有的消除运算是相同的，只是移位方式不同，在LF中仅须左移位，因而简化了变换，至此我们证明了：（δ）$\Longleftrightarrow L^*\cdot F\Longleftrightarrow LF$，$\overset{(l)}{\alpha_l}$，$\overset{(l)}{\beta_l}>0$，$l=1,2,\cdots,m$。

三、计算例子

判断复常系数线性系统

$$\frac{d^4y}{dt^4}+(3+j2)\frac{d^3y}{dt^3}+(4+j5)\frac{d^2y}{dt^2}+(1+j8)\frac{dy}{dt}+(-3+j3)y=0\text{的稳定性。}$$

$$
(1)\text{式}\Longleftrightarrow\begin{cases}
L_{2\times2}(2(x))\cdot\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}=\overset{L^*\cdot F}{\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2^*(x)\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1 & b_1 & a_2\cdots q\\ a_1 & b_2 & a_3\cdots s\ 0\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{X}\\
\qquad =F\overrightarrow{X}\\
\qquad (\overrightarrow{X}=[x^m,jx^{m-1},x^{m-2},jx^{m-3},\cdots,t]^T)\\
L_{2\times2}(1,2(-c_1))F=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{a_1b_1-b_2}{a_1} & \dfrac{a_1a_2-a_3}{a_1}\cdots q\\ a_1 & b_2 & a_3\cdots s\ \ 0\end{pmatrix}=\overset{(0)}{F}_p\\
T_{2\times2}[2(-1)]\overset{(0)}{F}_p=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{a_1b_1-b_2}{a_1} & \dfrac{a_1a_2-a_3}{a_1}\cdots q\\ 0 & a_1 & b_2\quad\cdots s\end{pmatrix}=\overset{(1)}{F}_p
\end{cases}
$$

$$
\text{令}\ \overset{(1)}{F}_p=\begin{pmatrix}0 & \overset{(1)}{\alpha}_1 & \overset{(1)}{\alpha}_2\cdots\overset{(1)}{\alpha}_m\\ 0 & \overset{(1)}{\beta}_1 & \overset{(1)}{\beta}_2\cdots\overset{(1)}{\beta}_m\end{pmatrix}
$$

$$
(2)\text{式}\Longleftrightarrow L_{2\times2}(1,2(-k_1))\overset{(1)}{F}_p=\begin{pmatrix}0 & 0 & \overset{(2)}{\alpha}_2 & \overset{(2)}{\alpha}_3\cdots\overset{(2)}{\alpha}_m\\ 0 & \overset{(1)}{\beta}_1 & \overset{(1)}{\beta}_2 & \cdots\ \overset{(1)}{\beta}_m\end{pmatrix}=\overset{(2)}{F}_p
$$

$$
(3)\text{式}\Longleftrightarrow\begin{cases}
T_{2\times2}(1(1))\overset{(2)}{F}_p=\begin{pmatrix}0 & \overset{(2)}{\alpha}_2 & \overset{(2)}{\alpha}_3\cdots\overset{(2)}{\alpha}_m & 0\\ 0 & \overset{(1)}{\beta}_1 & \overset{(1)}{\beta}_2\ \cdots & \overset{(1)}{\beta}_m\end{pmatrix}=\overset{(3)}{F}_p\\
L_{2\times2}(2,1(-c_2))\overset{(3)}{F}_p=\begin{pmatrix}0 & \overset{(2)}{\alpha}_2 & \overset{(2)}{\alpha}_3\cdots & \overset{(2)}{\alpha}_m & 0\\ 0 & 0 & \overset{(2)}{\beta}_2 & \overset{(2)}{\beta}_3\cdots & \overset{(2)}{\beta}_m\end{pmatrix}=\overset{(4)}{F}_p\\
T_{2\times2}(1(-1))\overset{(4)}{F}_p=\begin{pmatrix}0 & 0 & \overset{(2)}{\alpha}_2 & \overset{(2)}{\alpha}_3\cdots\overset{(2)}{\alpha}_m\\ 0 & 0 & \overset{(2)}{\beta}_2 & \overset{(2)}{\beta}_3\cdots\overset{(2)}{\beta}_m\end{pmatrix}=\overset{(5)}{F}_p
\end{cases}
$$

$$
(m)\text{式}\Longleftrightarrow L_{2\times2}(2,1(-k_m))\overset{(m)}{F}_p=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ 0\cdots0 & & \overset{(m)}{\alpha}_m\\ 0\cdots0 & & 0\end{pmatrix}
$$

$$
\overset{L\cdot F}{\begin{bmatrix}1 & b_1 & a_2\ \cdots\ q\\ a_1 & b_2 & a_3\cdots s\ \ 0\end{bmatrix}}=F
$$

$$
L_{2\times2}(1,2(-c_1))F=\overset{(0)}{F}_p
$$

$$
T_{2\times2}[1(1)]\overset{(0)}{F}_p
$$

$$
=\begin{pmatrix}\dfrac{a_1b_1-b_2}{a_1} & \dfrac{a_1a_2-a_3}{a_1}\cdots q & 0\\ a_1 & b_2\ \cdots\ s & 0\end{pmatrix}=\overset{(1)}{F}_q
$$

$$
\text{令}\ \overset{(1)}{F}_q=\begin{pmatrix}\overset{(1)}{\alpha}_1 & \overset{(1)}{\alpha}_2\cdots\overset{(1)}{\alpha}_m & 0\\ \overset{(1)}{\beta}_1 & \overset{(1)}{\beta}_2\cdots\overset{(1)}{\beta}_m & 0\end{pmatrix}
$$

$$
L_{2\times2}(1,2(-k_1))\cdot\overset{(1)}{F}_q
$$

$$
=\begin{pmatrix}0 & \overset{(2)}{\alpha}_2 & \overset{(2)}{\alpha}_3\cdots\overset{(2)}{\alpha}_m & 0\\ \overset{(1)}{\beta}_1 & \overset{(1)}{\beta}_2 & \cdots\ \overset{(1)}{\beta}_m & 0\end{pmatrix}=\overset{(2)}{F}_q
$$

$$
T_{2\times2}(1(1))\overset{(2\ q)}{F}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\overset{(2)}{\alpha}_2 & \overset{(2)}{\alpha}_3\cdots\overset{(2)}{\alpha}_m & 0 & 0\\ \overset{(1)}{\beta}_1 & \overset{(1)}{\beta}_2\ \cdots & \overset{(1)}{\beta}_m & 0\end{pmatrix}=\overset{(3)}{F}_q
$$

$$
L_{2\times2}(2,1(-c_2))\overset{(3)}{F}_q
$$

$$
=\begin{pmatrix}\overset{(2)}{\alpha}_2 & \overset{(2)}{\alpha}_3\cdots\overset{(2)}{\alpha}_m & & 0 & 0\\ 0 & \overset{(2)}{\beta}_2 & \overset{(2)}{\beta}_3\ \cdots & \overset{(2)}{\beta}_m & 0\end{pmatrix}=\overset{(4)}{F}_q
$$

$$
T_{2\times2}(2(1))\overset{(4)}{F}_q
$$

$$
=\begin{pmatrix}\overset{(2)}{\alpha}_2 & \overset{(2)}{\alpha}_3\cdots\overset{(2)}{\alpha}_m & 0 & 0\\ \overset{(2)}{\beta}_2 & \overset{(2)}{\beta}_3\cdots\overset{(2)}{\beta}_m & 0 & 0\end{pmatrix}=\overset{(5)}{F}_q
$$

$$
\vdots
$$

$$
L_{2\times2}(2,1(-k_m))\cdot\overset{(m)}{F}_q=\begin{pmatrix}\overset{(m)}{\alpha}_m & 0\cdots0\\ 0 & 0\cdots0\end{pmatrix}
$$

解：该系统的特征多项式 $f(x)=x^4+(3+j2)x^3+(4+j5)x^2+(1+j8)x-3+j3$，

$f_1(x)$和$f_2^*(x)$的系数阵 $F=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 8 & -3\\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$

$$L_t{}^*F:\ L_{2\times2}(1,2(-1))\cdot L_{2\times2}(1(3))F=\begin{bmatrix}0 & 1 & 11 & 21 & -9\\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\overset{(1)}{F_t}$$

$$T_{2\times2}[1(1)]\overset{(1)}{F_t}=\begin{bmatrix}1 & 11 & 21 & -9 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\overset{(2)}{F_t}$$

$$L_{2\times2}(1,2(-1))\cdot L(1(3))\cdot\overset{(2)}{F_t}=\begin{bmatrix}0 & 28 & 62 & -30 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\overset{(3)}{F_t}$$

$$T_{2\times2}[1(1)]\overset{(3)}{F_t}=\begin{bmatrix}28 & 62 & -30 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\overset{(4)}{F_t}$$

$$L_{2\times2}\left(2,1\left(-\frac{3}{28}\right)\right)\overset{(4)}{F_t}=\begin{bmatrix}28 & 62 & -30 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-46}{28} & * & * & 0\end{bmatrix}=\overset{(5)}{F_t}$$

$$T_{2\times2}[2(1)]\overset{(5)}{F_t}=\begin{bmatrix}28 & 62 & -30 & 0 & 0\\ \frac{-46}{28} & * & * & 0 & 0\end{bmatrix}$$. 因$\frac{-46}{28}<0$，此系统不稳定。

四、结　论

本文利用矩阵的行变换，特别是引入移位变换，能够快速简便地求最大公因子和判断复常系数线性系统的稳定性，对于实常系数系统只需令 $b_l=0$，$l=1,2,\cdots,m$，同样可以判断稳定性。这些算法改进了传统的殴几里德求最大公因子方法和胡维茨判据，而且特别容易由计算机求解。

参 考 文 献

Evelyn Frank, On the Zeos of Polynomials with Complex Coefficients, Bulletin of the American Mathematical Society, 52, (1946), 144—157.

Calculating Greatest Common Divisor of n Polynomials and Judging Stability of Linear System with Constant Complex Coefficients Through Matrix Transformation

Kai Pingan

(Energy Research Institute, Academia Sinica, Beijing)

Xu Hui

(Association of Science and Technology of Tongling, Anhui)

Abstract

This paper gives a new method for calculating greatest common divisor of many polynomials, and a stability criterion for linear system with constant complex coefficients through matrix transformation. The methods are very simple and easy, they improve Euclid and Hurwitz algorithms.