第5卷 第3期 控制理论与应用 Vol.5, No.3
1988年9月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Sept., 1988

离散型线性定常系统的代数 Riccati 方程的小摄动问题*

洪奕光　黄　琳

（北京大学力学系）

摘　要

本文研究了离散型线性定常系统的代数 Riccati 方程解的摄动界估计问题. 利用矩阵变换避免了非线性矩阵方程解估计的困难与繁琐，并将结果用系统参数的摄动界表出.

一、引　　言

Riccati 方程在线性系统中特别在最优控制、Kalman 滤波等问题中有着广泛的应用。但在实际问题中参数常常受到各种干扰而产生摄动，所以需要考虑并估计这些摄动对系统影响的大小以便分析误差及其产生的原因。对于连续型线性系统的 Riccati 方程，〔2〕已给出了摄动界的估计. 对于实际中常用的离散系统，〔3〕对 Liapunov 方程的摄动界也作出了估计.

对于离散型线性系统的代数 Riccati 方程说来，由于方程本身的非线性，估计摄动界就比较复杂. 若用矩阵范数直接估计，就需要考虑关于摄动界的至少三次的不等式，且项数较多，条件较高，很难直接应用. 若将它化为连续型方程，再利用〔2〕的结果，既不直接也不方便. 本文采用作矩阵变换的方法，分步进行，从而比较简便地得到了离散型 Riccati 方程摄动界的估计公式.

二、摄动界的估计

离散型线性定常系统的代数 Riccati 方程的一般形式是：

$$P=A^TPA-A^TPB(I+B^TPB)^{-1}B^TPA+Q. \tag{1}$$

为方便，又不失一般性，不妨假定 Q 正定.

令

$$L=P-PB(I+B^TPB)^{-1}B^TP, \tag{2}$$

对（2）两边乘 BB^TP，经合并得

$$LBB^TP=PB(I+B^TPB)^{-1}B^TP=P-L.$$

令 $W=BB^T$。由于 P 正定，W 半正定，故 $I+WP$ 可逆. 设 $H=(I+WP)^{-1}$. 经

---

*国家自然科学基金资助的课题.

本文于 1987年12月16日收到。

移项知

$L = PH$。　于是（1）就化为

$$P = A^T PHA + Q。 \tag{3}$$

为了进一步讨论，引入以下概念（参见[1]）：

（1）矩阵 $G \in R^{n\times n}$ 的算子二范数，按定义有：

$$\|G\|_2 = \sup_{x\neq 0} (\|Gx\|_2 / \|x\|_2) \quad 其中\ x \in R^n，\ \|x\|_2 = (x^T x)^{1/2}。$$

（2）矩阵 $G \in R^{n\times n}$ 的 Frobenius 范数，按定义有：

$$\|G\|_F^2 = \mathrm{trace}\, G^T G = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^2 ，G = (g_{ij})。$$

（3）矩阵 $F \in R^{m\times n}$ 与 $G \in R^{l\times k}$ 的Kronecker 乘积：

$$F \otimes G = \begin{pmatrix} f_{11}G & f_{12}G & \cdots & f_m G \\ f_{21}G & f_{22}G & \cdots & f_{2n}G \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{m1}G & f_{m2}G & \cdots & f_{1n}G \end{pmatrix} \in R^{ml\times nk}，其中\ F = (f_{ij})。$$

它是由空间 $R^{m\times n} \times R^{l\times k}$ 到空间 $R^{ml\times nk}$ 的一种映射。

（4）映射 σ：$R^{m\times n} \to R^{mn}$　按定义有：

$$若矩阵\ F = \begin{pmatrix} f_1^T \\ \vdots \\ f_m^T \end{pmatrix} \in R^{m\times n}，其中\quad f_i \in R^n，i = 1,\cdots,m$$

则在 σ 作用下有：$\sigma(F) = f = [f_1^T \quad f_2^T \ \cdots \ f_m^T]^T \in R^{mn}$。

显然 Kronecker 乘积与 σ 变换有如下的性质：若 A, X, B, Q 具有适当的行列数且满足方程 $AXB = Q$，则有：（$A \otimes B^T$）$\cdot x = q$，

其中　$x = \sigma(X)$，$q = \sigma(Q)$。

记 A 的摄动后矩阵为 A'，对应的摄动为 $\delta A = A' - A$。其它矩阵可以此类推。显然有：

$$H' = (I + W'P')^{-1} = [I + (W + \delta W)(P + \delta P)]^{-1}，而$$

$$\delta H = -H(W'\delta P + \delta W P)H' = -H'(W'\delta P + \delta W P)H。 \tag{4}$$

引理 1　令 $\boldsymbol{T} = I_{n^2} - A^T[I_n - PHW] \otimes A^T H^T$，则 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异的。

证　令 $V = I_n - PHW$，两边同乘 PW 并化简得：

$$PWV = PHW = I - V，即\ V = (I + PW)^{-1} = H^T。$$

将（3）式化为 $P = A^T H^T H^{-T} PHA + Q$，展开：

$$P = A^T H^T PHA + A^T H^T PWPHA + Q = A^T H^T PHA + \hat{Q}。$$

设 HA 的特征值为 λ，特征向量为 $X(\neq 0)$。

由 $\hat{Q}$ 的正定性可知：$(1-\lambda\bar{\lambda})X^HPX>0$，即 HA 的特征值的绝对值小于1。所以 $A^TH^T\otimes A^TH^T$ 的特征值不是1，故 T 可逆。

考虑（3）的摄动方程 $P'=A'^TP'H'A'+Q$，并展开：

$$\delta P=\delta A^TPHA+A^TPH\delta A+\delta A^TPH\delta A+(A+\delta A)^T[\delta P(H+\delta H)-PH(W\delta P+\delta W\delta P+\delta WP)(H+\delta H)](A+\delta A)。\tag{5}$$

定理 1 若 δA，δW，δP 充分小，则（5）式必定确定一个 δP 关于 δA 与 δW 的单值连续函数且有极限：

$$\lim_{\substack{\|\delta A\|_F\to 0\\ \|\delta W\|_F\to 0}}\|\delta P\|_F=0。\tag{6}$$

证　对（5）作 σ 映射，并令 $\sigma(\delta P)=p$，$\sigma(\delta A)=a$，$\sigma(\delta W)=b$，经过化简得：

$$\{I_{n^2}-A'^T[H^T-PH\delta W]\otimes A'^TH'^T\}p-[A^TPH\otimes I_n+I_n\otimes A^TH^TP^T+\delta A^TPH\otimes I_n]a+[A'^TPH\otimes A'^TH'^TP^T]b=0。$$

简写为

$$c_0p-c_1a+c_2b=0。\tag{7}$$

显然 $p=a=b=0$ 时 $\|\delta H\|_F=0$。　于是

（1）$f(p,a,b)=c_0p-c_1a+c_2b$ 在（p,a,b）空间坐标原点的小邻域内有定义，且分别可对 p,a,b 求偏导数。

（2）$f(0,0,0)=0$。

（3）$\det\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)_{p=a=b=0}=\det(T)\neq 0$（由引理1）。

由隐函数存在定理，必存在 $\delta>0$，使当 $\|p\|_F<\delta$，$\|a\|_F<\delta$ 及 $\|b\|_F<\delta$ 时方程（7）将 p 确定为 a,b 的连续函数。即在原点邻域内 δP 是 $\delta A,\delta W$ 的单值连续函数，故极限（6）成立。　　证毕。

引理 2　$\|PH\|_2\leqslant\|P\|_2$

证　$PH=P-PB(I+B^TPB)^{-1}B^TP=P-\bar{P}=(PH)^T$。

由于 $\bar{P}$ 半正定，故 $x^TPx\geqslant x^TPHx$，$\forall x(\neq 0)\in R^n$，即 P 的最大特征值 $\lambda_1\geqslant PH$ 的最大特征值 λ_2。因 P,PH 都是对称的，所以 P^2 的最大特征值 $\lambda_1^2\geqslant(PH)^2$ 的最大特大特征值 λ_2^2，即 $\|P\|_2\geqslant\|PH\|_2$。同理 $\|P'\|_2\geqslant\|P'H'\|_2$。

引理 3　设 $\gamma=(\|W\|_2+\|\delta W\|_F)\|\delta P\|_F\|H\|_2+\|\delta W\|_F\|P\|_2<1$，

则

$$\|\delta H\|_2\leqslant\frac{\gamma}{1-\gamma}\|H\|_2。\tag{8}$$

证　对（4）取算子二范数，移项化简后再利用条件及矩阵的算子二范数不大于矩阵Frobenius范数这一性质可得。

引理 4　令 $\xi>0$，$\zeta>0$ 均为足够小量，$\tau>0$，若 $\xi\leqslant\zeta+\tau\xi^2$，则

$$\xi \leqslant \frac{1}{2\tau} \left[1-(1-4\zeta\tau)^{1/2}\right]=\xi_0. \qquad (9)$$

证　（9）式等价于不等式：$\tau\xi^2-\xi-\zeta\geqslant 0$，因$\xi$是小量，所以$\xi$只可能在区间$[0\quad \xi_0]$中。

下面对解的摄动界进行估计。

将（7）换为另一种形式：

$$TP=A^T\delta H^T\otimes A^TH^Tp+(A'^TP'H'\otimes I_n+I_n\otimes A^TH'^TP'^T)a-A^TP'H'\otimes A^TH^TP^Tb,$$

两边同乘T^{-1}后，等式两边取二范数　取$t=\|T^{-1}\|_2$。

考虑引理2并将引理3中（8）式代入得：

$$\|\delta P\|_F\leqslant t\{\|A\|_2^2\|H\|_2^2\ \frac{\gamma}{1-\gamma}\|\delta P\|_F+(2\|A\|_2+\|\delta A\|_F)(\|P\|_2+\|\delta P\|_F)$$

$$\cdot\ \|\delta A\|_F+\|A\|_2^2\ (\|P\|_2+\|\delta P\|_F)\|P\|_2\|\delta W\|_F\},$$

两边同乘$1-\gamma$，合并同类项后形式为

$$(1-\eta)\|\delta P\|_F\leqslant t(\alpha\|\delta A\|_F+\beta\|\delta W\|_F)+\tau\|\delta P\|_F^2,$$

其中　$\alpha=(1-\|\delta W\|_F\|P\|_2)\|P\|_2(2\|A\|_2+\|\delta A\|_F)$，

$\beta=(1-\|\delta W\|_F\|P\|_2)\ \|P\|_2^2\ \|A\|_2^2$，

$$\tau=(\|W\|_2+\|\delta W\|_F)\ \|H\|_2+t\{(\|W\|_2+\|\delta W\|_F)\|H\|_2[1+\|A\|_2^2\|H\|_2^2$$
$$-\ \|A\|_2^2\|P\|_2\|\delta W\|_F]-2\|A\|_2\|\delta A\|_F-\|\delta A\|_F^2\},$$

$$\eta=\|P\|_2\|\delta W\|_F+t\{\|A\|_2\|\delta W\|_F\|P\|_2[\|A\|_2\|H\|_2^2+(1-\|\delta W\|_F\|P\|_2)\|A\|_2$$
$$-(\|W\|_2+\|\delta W\|_F)\|H\|_2\|P\|_2]+(2\|A\|_2\|\delta A\|_F+\|\delta A\|_F^2)[1-\|\delta W\|_F\|P\|_2$$
$$-(\|W\|_2+\|\delta W\|_F)\|H\|_2\|P\|_2]\}.$$

当$1-\eta>0\ \ \tau>0$且判别式不小于零，由（9）可知

$$\|\delta P\|_F\leqslant\frac{1}{2\tau}\{1-\eta-[(1-\eta)^2-4\tau t(\alpha\|\delta A\|_F+\beta\|\delta W\|_F)]^{1/2}\}. \qquad (10)$$

定理 2　η，τ，t，α，β如上述且满足：

$$\eta<1\text{及}(1-\eta)^2\geqslant 4\tau t(\alpha\|\delta A\|_F+\beta\|\delta W\|_F),\ \tau>0$$

则不等式（10）成立。

参　考　文　献

〔1〕 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，北京，（1984）.

〔2〕 黄琳、朱伟灵，连续型线性定常系统的Riccati代数方程的小摄动问题，应用数学和力学，5，（1982）.

〔3〕 黄琳、朱伟灵，离散型线性定常系统的摄动矩阵李雅普诺夫方程的若干问题，应用数学和力学，1，（1983）.

〔4〕 Kailath, T., Linear Systems, Prentice-Hall, (1980).

The Small Disturbance Problems Associated with the Algebraic Riccati Equation of Discrcte Linear Time-invariant Systems

Hong Yiguang, Huang Lin

(Department of Mechanics, Beijing University)

Abstract

In this article, the estimation problem of the disturbance range of the solution of the algebraic Riccati equation in discrete linear time-invarient system is studied. The difficulty and complexity for estimation of the solution of nonlinear matrix equation is avoided by some matrix transformations and then the result expressed by the disturbance of the system parameters is obtained.

更 正

本刊本期封三会议简讯第14行（保加利亚）应为（比利时）.特此更正.