第5卷 第4期 控制理论与应用 Vol.5, No.4
1988年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec., 1988

变遗忘因子最小二乘算法的收敛速度

李瑞胜

（内蒙古师范大学计算中心，呼和浩特）

摘　要

本文对多维的ARMAX系统，在非持续激励条件下，给出了变遗忘因子最小二乘算法的收敛速度．当变遗忘因子 $\lambda_n=1$ 时，得到了最小二乘算法的收敛速度．

一、问题的提出

研究用最小二乘算法或修改最小二乘算法来辨识ARMAX系统参数的强一致问题和收敛速度问题（例如文献〔5〕，〔9〕）是十分重要的．在早期的研究中（参见文献〔2〕—〔4〕），为保证最小二乘算法强一致需加持续激励条件，即 $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\varphi_i^\tau$ 的最大、最小本征值之比一致有界．Lai和Wei[6]首先对具有不相关噪声的单输入、单输出系统给出了最小二乘算法的收敛速度．其后，Chen和Guo[10]对具有相关噪声的多输入、多输出系统，给出了最小二乘算法的收敛速度，推广了Lai和Wei的工作．他们证明了为保证算法强一致，只需要 $\log r_n^*$ 与 $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^*\varphi_i^{*\tau}$ 的最小本征值之比随n趋于无穷趋于零，这里 r_n^*，φ_n^* 由最小二乘算法给出，这也许是最弱的非持续激励条件[6],[10]．

在实际应用中，用最小二乘算法辨识系统常会出现算法不稳定的现象，如改用变遗忘因子最小二乘算法，那么算法的性能就会明显地改善，如对跟踪问题就是如此[7]．变遗忘因子最小二乘算法本质上是要求加权二次误差准则函数达到最小[7]．Lozano[8]考虑了用变遗忘因子最小二乘算法辨识带有高斯白噪声的单输入、单输出系统问题，给出了使算法估值收敛到某个具有零均值、有限方差的随机变量的持续激励条件，其中对 λ_n 要求：$0<\delta\leqslant\lambda_n\leqslant1-\varepsilon$，$\varepsilon>0$．

本文考虑了变遗忘因子最小二乘算法的收敛速度问题，这里并没有给出 λ_n 的具体表达式，因而，分析是对一般情形进行的．在实际应用中，我们可以选择合适的 λ_n，以保证加快收敛速度．本文的范例表明，变遗忘因子最小二乘算法的收敛速度比最小二乘算法快．本文推广了Chen和Guo的收敛速度的分析工作．

考虑多维的ARMAX系统

$$y_n+A_1y_{n-1}+\cdots+A_py_{n-p}=B_1u_{n-1}+\cdots+B_qu_{n-q}+w_n+C_1w_{n-1}+\cdots+C_rw_{n-r},\qquad(1)$$

本文于1987年9月3日收到．1988年4月16日收到修改稿．

这里y_n，u_n，w_n分别为m，l，m维输出、输入和噪声，阶数p，q，r已知。令

$$\theta^{\tau}=[-A_1\cdots -A_p, B_1\cdots B_q, C_1\cdots C_r], \tag{2}$$

这里θ是待估计的未知矩阵。

任取初值θ_o，φ_o后，对θ的估计θ_n由变遗忘因子最小二乘算法给出

$$\theta_{n+1}=\theta_n+a_nP_n\varphi_n(y_{n+1}^{\tau}-\varphi_n^{\tau}\theta_n), \tag{3}$$

$$P_{n+1}=(P_n-a_nP_n\varphi_n\varphi_n^{\tau}P_n)/\lambda_n, a_n=(\lambda_n+\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n)^{-1}, \tag{4}$$

$$\varphi_n^{\tau}=[y_n^{\tau}\cdots y_{n-p+1}^{\tau}, u_n^{\tau}\cdots u_{n-q+1}^{\tau}, y_n^{\tau}-\varphi_{n-1}^{\tau}\theta_n\cdots y_{n-r+1}^{\tau}-\varphi_{n-r}^{\tau}\theta_{n-r+1}]. \tag{5}$$

当$\lambda_n=1$时，这就是通常的最小二乘算法。

对$n<0$，令$y_n=u_n=w_n=0$。不失一般性，我们可取非降σ-代数族$F_n=\sigma\{w_i, 0\leqslant i\leqslant n\}$.设噪声$\{w_n\}$是关于$\{F_n\}$的鞅差列，亦即$w_n\in F_n$，$E(w_{n+1}|F_n)=0$，这可解释成现时刻的噪声$w_n$与历史不相关。由此假设和本文定理中的条件c)可知，噪声序列$\{w_n\}$均值为0零，而方差一致有界。因此，不相关噪声w_n包括了工程上常用的白噪声的情形。当$r>$时，由（1）式可知，系统噪声是有色噪声。

设$0<\lambda_n\leqslant 1$，$\lambda_n\in F_n$，$\forall n$。规定$\prod_{i=n}^{n-1}\lambda_i=1$，$\forall n$.记$P_o=dI$, $d=mp+lq+mr$.设$\lambda_{\max}^n$，$\lambda_{\min}^n$分别为P_n^{-1}的最大、最小本征值。令

$$\tilde{\theta}_n=\theta-\theta_n,$$

$$r_n=1+\sum_{i=o}^{n-1}\|\varphi_i\|^2, r_0=1, \tag{6}$$

$$C(z)=I+C_1z+\cdots+C_rz^r. \tag{7}$$

由（4）式，易见

$$P_{n+1}^{-1}=\lambda_nP_n^{-1}+\varphi_n\varphi_n^{\tau}, \tag{8}$$

$$P_n^{-1}=\frac{1}{d}\prod_{i=o}^{n-1}\lambda_iI+\sum_{i=o}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n-1}\lambda_j\varphi_i\varphi_i^{\tau},\quad n\geqslant 1. \tag{9}$$

二、主要的结果

我们先给出本文的主要结果

定理 若 a）$u_n\in F_n$，b）$C^{-1}(z)-\frac{1}{2}I$严正实，c）$\sup_{n\geqslant 0}E(\|w_{n+1}\|^{\beta}|F_n)<\infty\quad a.s.$

其中$\beta\geqslant 2$，则i) $\|\theta-\theta_n\|=O\left(\left(\frac{\log f_n}{\lambda_{\min}^n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$，$n\to\infty$，当$\beta>2$，

ii) $\|\theta-\theta_n\| = O\left(\left(\dfrac{\log f_n \log\log f_n (\log\log\log f_n)^{1+\delta}}{\lambda_{\min}^{n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$,

$n\to\infty$, $\forall\delta>0$, 当$\beta=2$,

其中 $f_n \triangleq \left(\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i\right)^{-d} b_n$, $b_n \triangleq \det P_n^{-1}$。

为证明定理，我们先建立两个引理。

引理 1 对一切n，我们有

i) $\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i \leqslant \log\left[\left(\prod_{i=0}^{n}\lambda_i\right)^{-d} b_{n+1}\right] + d\log d$

ii) $\sum_{i=n}^{n+m} a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i \geqslant 1 - b_n\left(\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i\right)^{-d}\left(\prod_{i=0}^{n+m}\lambda_i\right)^{d} b_{n+m+1}^{-1}$, $\forall m\geqslant 1$

证 i) 由于

$$P_{n+1}\varphi_n = P_n\varphi_n(1-a_n\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n)/\lambda_n = a_nP_n\varphi_n, \tag{10}$$

从(8)式可知

$$\begin{aligned}\lambda_n^d \det P_n^{-1} &= \det[P_{n+1}^{-1}(I-P_{n+1}\varphi_n\varphi_n^{\tau})]\\ &= \det P_{n+1}^{-1}(1-\varphi_n^{\tau}P_{n+1}\varphi_n)\\ &= \det P_{n+1}^{-1}(1-a_n\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n),\end{aligned}$$

由此得到

$$a_n\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n = (b_{n+1}-\lambda_n^d b_n)/b_{n+1},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i &= \sum_{i=0}^{n}\frac{b_{i+1}-\lambda_i^d b_i}{b_{i+1}} \leqslant \sum_{i=0}^{n}\int_{\lambda_i^d b_i}^{b_{i+1}}\frac{dx}{x}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\log\frac{b_{i+1}}{\lambda_i^d b_i} = \log\left[\left(\prod_{i=0}^{n}\lambda_i\right)^{-d} b_{n+1}\right] + d\log d\end{aligned}$$

ii) 由 $b_{i+1}\geqslant\lambda_i^d b_i$，有 $b_i \geqslant \prod_{j=n}^{i-1}\lambda_j^d b_n$，$\forall i\geqslant n$。

于是

$$\sum_{i=n}^{n+m} a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i = \sum_{i=n}^{n+m}\left(\frac{1}{b_i}-\frac{\lambda_i^d}{b_{i+1}}\right)b_i \geqslant \sum_{i=n}^{n+m}\left(\frac{1}{b_i}\prod_{j=n}^{i-1}\lambda_j^d - \frac{1}{b_{i+1}}\prod_{j=n}^{i}\lambda_j^d\right)b_n$$

$$= 1-\frac{b_n}{b_{n+m+1}}\left(\prod_{j=n}^{n+m}\lambda_j\right)^d = 1 - b_n\left(\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j\right)^{-d}\left(\prod_{j=0}^{n+m}\lambda_j\right)^{d} b_{n+m+1}^{-1}, \ \forall m\geqslant 1。$$

引理 2 若$C^{-1}(z)-\frac{1}{2}I$严正实，$u_n\in F_n$，则

$$\operatorname{tr}[(\theta-\theta_{n+1})^{\tau}P_{n+1}^{-1}(\theta-\theta_n)]=O(1)+O\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i\|w_{i+1}\|^2\right).$$

证 令

$$\xi_{n+1}=y_{n+1}-w_{n+1}-\theta_{n+1}^{\tau}\varphi_n\ . \tag{11}$$

从（1），（2），（7）式，推知

$$\begin{aligned}C(z)\xi_{n+1}&=[C(z)-I](y_{n+1}-\theta_{n+1}^{\tau}\varphi_n)-C(z)w_{n+1}-\theta_{n+1}^{\tau}\varphi_n+y_{n+1}\\&=(\theta-\theta_{n+1})^{\tau}\varphi_n=\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}\varphi_n.\end{aligned}\tag{12}$$

从（3）式，容易看出

$$\begin{aligned}y_{n+1}-\theta_{n+1}^{\tau}\varphi_n&=y_{n+1}-[\theta_n^{\tau}+a_n(y_{n+1}-\theta_n^{\tau}\varphi_n)\varphi_n^{\tau}P_n]\varphi_n\\&=(1-a_n\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n)(y_{n+1}-\theta_n^{\tau}\varphi_n)=a_n\lambda_n(y_{n+1}-\theta_n^{\tau}\varphi_n).\end{aligned}\tag{13}$$

利用（3），（11），（13）式，我们有

$$\widetilde{\theta}_{n+1}=\widetilde{\theta}_n-P_n\varphi_n(\xi_{n+1}^{\tau}+w_{n+1}^{\tau})/\lambda_n.$$

再由（8）式，推得

$$\begin{aligned}\operatorname{rt}(\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}P_{n+1}^{-1}\widetilde{\theta}_{n+1})&=\operatorname{tr}\lambda_n(\widetilde{\theta}_n^{\tau}P_n^{-1}\widetilde{\theta}_n)+\|\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}\varphi_n\|^2-2(\xi_{n+1}^{\tau}+w_{n+1}^{\tau})\widetilde{\theta}_n^{\tau}\varphi_n\\&\quad+\varphi_n^{\tau}P_n\varphi_n\|\xi_{n+1}+w_{n+1}\|^2/\lambda_n\\&\leqslant\operatorname{tr}(\widetilde{\theta}_n^{\tau}P_n^{-1}\widetilde{\theta}_n)+\|\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}\varphi_n\|^2-2(\xi_{n+1}^{\tau}+w_{n+1}^{\tau})\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}\varphi_n\\&\leqslant\operatorname{tr}(\widetilde{\theta}_n^{\tau}P_n^{-1}\widetilde{\theta}_n)-2\varphi_n^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1}(\xi_{n+1}-\frac{1}{2}(1+K_1)\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}\varphi_n)\\&\quad-K_1\|\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}\varphi_n\|^2-2w_{n+1}^{\tau}\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}\varphi_n.\end{aligned}\tag{14}$$

由条件b）和（12）式可知，存在常数$K_1, K_2>0$，使

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i^{\tau}\widetilde{\theta}_{i+1}(\xi_{i+1}-\frac{1}{2}(1+K_1)\widetilde{\theta}_{i+1}^{\tau}\varphi_i)+K_2\geqslant 0,\forall n,$$

（14）式求和，我们得到

$$\operatorname{tr}(\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}P_{n+1}^{-1}\widetilde{\theta}_{n+1})\leqslant O(1)-K_1\sum_{i=0}^{n}\|\widetilde{\theta}_{i+1}^{\tau}\varphi_i\|^2-2\sum_{i=0}^{n}w_{i+1}^{\tau}\widetilde{\theta}_{i+1}^{\tau}\varphi_i.$$

从文献[10]中的引理2，可推知结论成立。

在定理的证明过程中，我们将多次用到如下定理，

鞅收敛定理　设$1\leqslant p\leqslant 2$，$\{X_n,F_n\}$是一个鞅差列，若$\sum_{i=2}^{\infty}E(|X_i|^p|F_{i-1})<\infty\ a.s.$，则$\sum_{i=1}^{\infty}X_i$几乎处处收敛。

定理 2 的证明。

由于

$$\|\widetilde{\theta}_{n+1}\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{\min}^{n+1}}\mathrm{tr}(\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}P_{n+1}^{-1}\widetilde{\theta}_{n+1}),$$

我们只需证明

$$\mathrm{tr}(\widetilde{\theta}_{n+1}^{\tau}P_{n+1}^{-1}\widetilde{\theta}_{n+1})=\begin{cases}O(\log f_{n+1}),\quad 当\beta>2,\\ O(\log f_{n+1}\log\log f_{n+1}(\log\log\log f_{n+1})^{1+\delta})\\ \forall\delta>0,\ 当\beta=2。\end{cases}\tag{15}$$

容易看出　$0\leqslant f_n\leqslant f_{n+1}$，$\forall n$。

情形Ⅰ）　若$\lim\limits_{n\to\infty}f_n<\infty$，

由引理1，i)我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i<\infty,$$

由此可知

$$\sum_{i=0}^{\infty}E[\,|a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i(\|w_{i+1}\|^2-E(\|w_{i+1}\|^2F_i))|F_i]<\infty,$$

故由鞅收敛定理，可知

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i(\|w_{i+1}\|^2-E(\|w_{i+1}\|^2\,|F_i))<\infty,$$

于是

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i\|w_{i+1}\|^2=O(1).$$

再由引理2，推出（15）式成立。

情形Ⅱ）　若$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\infty$，

由引理1，ii)对固定的n，我们有

$$\sum_{i=n}^{n+m}a_i\varphi_n^{\tau}P_i\varphi_i\geqslant 1-\frac{f_n}{f_{n+m+1}}\xrightarrow[m\to\infty]{}1,$$

因而

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i=\infty.$$

d）　当$\beta>2$时，取定$r_0\in(2,\min(\beta,4)]$，

由于

$$E(\|w_{n+1}\|^{r_o}\mid F_n)\leqslant(E(\|w_{n+1}\|^{\beta}\mid F_n))^{r_o/\beta},$$

从C_r一不等式和条件c），可知

$$\sup_{i\geqslant o}E[\,|\,\|w_{i+1}\|^2-E(\|w_{i+1}\|^2\mid F_i)|^{r_o/2}\mid F_i]<\infty.$$

不失一般性,可设,存 在n_o，使$\varphi_{n_o}\neq 0$,因此,$a_{n_o}\varphi_{n_o}^{\tau}P_{n_o}\varphi_{n_o}>0$，令$A_n=\sum\limits_{i=n_o}^{n}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i$，则

$$\sum_{i=n_o+1}^{\infty}\frac{a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i}{A_i^{r_o/2}}\leqslant\sum_{i=n_o+1}^{\infty}\int_{A_{i-1}}^{A_i}\frac{dx}{x^{r_o/2}}=\int_{A_{n_o}}^{\infty}\frac{dx}{x^{r_o/2}}<\infty,$$

注意到 $a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i\leqslant 1$，我 们得到

$$\sum_{i=n_o+1}^{\infty}E\left[\left|\frac{a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i}{A_i}(\|w_{i+1}\|^2-E(\|w_{i+1}\|^2\mid F_i))\right|^{r_o/2}\middle|F_i\right]<\infty.$$

易证，上式求和下标为n_o+1时，仍然可用鞅收敛定理，从而

$$\sum_{i=n_o}^{\infty}\frac{a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i}{A_i}(\|w_{i+1}\|^2-E(\|w_{i+1}\|^2\mid F_i))<\infty\ a.s.$$

易见，上式求和下标为n_o时，仍然可用Kronecker引理，于是

$$\sum_{i=n_o}^{n}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i\|w_{i+1}\|^2=\sum_{i=n_o}^{n}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_iE(\|w_{i+1}\|^2\mid F_i)+o(A_n),$$

从引理1，（i）' 推知

$$\sum_{i=o}^{n}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i\|w_{i+1}\|^2=O(A_n)=O\left(\sum_{i=o}^{n}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i\right)=O(\log f_{n+1}),$$

利用引理2，可知（15）式成立.

e） 当$\beta=2$时，由于

$$B_n\triangleq\sum_{i=o}^{n}a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty,$$

故存在N_o，使$B_{N_o}>e$，因而$\log\log B_i>0,\forall i\geqslant N_o$,

$$\sum_{i=N_o+1}^{\infty}\frac{a_i\varphi_i^{\tau}P_i\varphi_i}{B_i\log B_i(\log\log B_i)^{1+\delta}}\leqslant\int_{B_{N_o}}^{\infty}\frac{dx}{x\log x(\log\log x)^{1+\delta}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta(\log\log B_{N_o})^{\delta}}<\infty,$$

利用鞅收敛定理，我们有

$$\sum_{i=N_0}^{\infty}\frac{a_i\varphi_i^\tau P_i\varphi_i}{B_i\log B_i(\log\log B_i)^{1+\delta}}(\|w_{i+1}\|^2-E(\|w_{i+1}\|^2|F_i))<\infty,$$

易见，这里仍然可用Kronecker引理，于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i^\tau P_i\varphi_i\|w_{i+1}\|^2&=O(B_n)+o(B_n\log B_n(\log\log B_n)^{1+\delta})\\&=O(\log f_{n+1}\log\log f_{n+1}(\log\log\log f_{n+1})^{1+\delta}),\forall\delta>0.\end{aligned}$$

所以，（15）式成立。

当$\lambda_n=1$时，由于$f_n=b_n$，

$$b_n\geqslant\lambda_{\max}^n\left(\frac{1}{d}\right)^{d-1}\geqslant r_n\left(\frac{1}{d}\right)^d,$$

$$\log r_n-d\log d\leqslant\log b_n\leqslant d\log r_n,$$

我们得到了Chen和Guo[10]给出的结果。

推 论　若定理的条件成立且存在$C>0,N$，使$\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i\geqslant\frac{C}{b_n}$，$\forall n\geqslant N$，则

$$\|\theta-\theta_n\|=\begin{cases}O\left(\left(\dfrac{\log r_n}{\lambda_{\min}^n}\right)^{\frac{1}{2}}\right), & \text{当}\beta>2,\\ O\left(\left(\dfrac{\log r_n\log\log r_n(\log\log\log r_n)^{1+\delta}}{\lambda_{\min}^n}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\ \forall\delta>0, & \end{cases}$$

当$\beta=2$。

证　由于P_n^{-1}正定，从（9）式，我们有

$$b_n\leqslant(\lambda_{\min}^n)^d\leqslant(\operatorname{tr}P_n^{-1})^d=\left(\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i+\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n-1}\lambda_j\|\varphi_i\|^2\right)^d\leqslant r_n^d,$$

由此推知

$$\log f_n=d\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i\right)^{-1}+\log b_n\leqslant(d+1)\log b_n-d\log C\leqslant d(d+1)\log r_n-d\log C,$$

因此

$$\log f_n=O(\log r_n).$$

由定理，可推出结论成立。

注 1　从定理可知，只要$\beta>2$，$f_n=O\left(e^{(\lambda_{\min}^n)^\alpha}\right)$，$\alpha\in[0,1)$，$\lambda_{\min}^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$，就有$\theta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\theta$ a.s..

注 2 当$\beta>2$时，使$\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$的非持续激励条件为$\log f_n = o(\lambda_{\min}^n)$，$\lambda_{\min}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$。

下面这个简单的例子说明变遗忘因子最小二乘算法的收敛速度比最小二乘算法快。

例 考虑真实系统

$$y_n = 1.0y_{n-1} + w_n - 0.6w_{n-1},$$

这里$p=r=1$，$q=0$，$m=1$，$l=0$。在实际应用中，我们常让变遗忘因子λ_n以指数速度增加到1，于是，可引入下式[7]

$$\lambda_n = \lambda^o\lambda_{n-1} + 1 - \lambda^o,$$

通常取$\lambda^o=0.99$，$\lambda_o=0.95$。取初值$\theta_o=\varphi_o=0$，计算结果如下：

算法	运行次数	初值	参	数
最小二乘	100	$P_o=500$	1.01754	0.4153009
	200	$\lambda^o=1$	1.008548	0.2679623
	300		1.00513	0.0461372
	400	$\lambda_o=1$	1.003443	−0.1639381
变遗忘因子最小二乘	100	$P_o=500$	1.013732	0.2606458
	200	$\lambda^o=0.99$	1.004977	−1.031452
	300		1.00361	−0.7176351
	400	$\lambda_o=0.95$	1.002805	−0.670637
真值			1.00	−0.6

参考文献

〔1〕 Chow, Y.C., Local Convergence of Martingales and the Law of Large Numbers, The Annals of Mathematical Statistics, 36, (1965),552－558.

〔2〕 Ljung, L.,Consistency of Least-squares Identification Method, IEEE Trans. on Auto. Control, Technical Notes and Correspondence, AC-22:4,(1976).

〔3〕 Moore, J.B., On Strong Consistency of Least Squares Identification Algorithms, Automatica, 14,(1978), 505－509.

〔4〕 Solo,V., The Convergence of AML, IEEE Trans. on Auto. Control, AC－24:6, (1979).

〔5〕 Chen, H.F.,Strong Consistency and Convergence Rate of Least Squares Identification, Scientia Sinica (Series A), 25:7, (1982), 771-784.

〔6〕 Lai,T.L. and Wei, C.Z., Least Squares Estimates in Stochastic Regression Models With Applications to Identification and Control of Dynamic Systems, The Annal of Statistics, 10:1, (1982).

〔7〕 Ljung,L. and Soderstrom,T., Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press, Cambridge, Mass,(1983).

〔8〕 Lozano, R., Convergence Analysis of Recursive Identification Algorithms with Forgetting Factor, Automatica, 19:1, (1983).

〔9〕 陈翰馥，随机递推估计，科学出版社，北京，（1984）.

〔10〕 Chen, H. F. and Guo, L. Convergence Rate of Least Squares Identification and Adaptive Control for Stochastic System, Int.J.on Control, 44:5 (1986), 1459－1476.

Convergence Rate of Least Squares Algorithm with Forgetting Factor

Li Ruisheng

(Calculating Centre, Neimonggu Teacher's University, Huhehaote)

Abstract

Ih this paper, the convergence rate of least squuares algorithm with forgetting factor is established under non-persistent excitation condition for the multidimensional ARMAX system. Convergence rate of least squares algorithm is given when the forgetting factor λ_n is equal to 1.