第5卷 第4期
1988年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.4
Dec., 1988

多变量控制系统设计新法初探

田支平　赵轶群

（西安矿业学院电气工程系）

摘　要

本文从多变量控制系统的开环传递函数矩阵引入一个开环耦合传递函数矩阵$H(s)$。多变量系统的闭环稳定性可由$H(s)$的对角元素确定；直接校正那些对角耦合传递函数就可使多变量系统具有良好的闭环特性；从而使多变量系统的设计有可能化为数个单变量系统的设计。

一、耦合传递函数矩阵H(s)

自Rosenbrock提出了逆乃氏阵列法（Inverse Nyguist Array）（INA）[1]迎来多变量系统频域法复兴以来，众多方法[2-5]用来把多变量系统的设计化为一系列单变量设计。这些方法中最为成功的还是Rosenbrock的INA法和Macfarlane[2-3]的特征轨迹法（Characteristie Loci）（CL）。这些方法都是通过构造一组标量函数来达到把多变量系统设计化为一组单变量系统设计的。这些标量函数在INA法中是经前置或后置校正器校正后达到对角优势的传递函数矩阵的对角元素；在CL法中是传递函数矩阵的m个特征传递函数（m是传递函数矩阵的维数）。

现在我们也来构造一组标量传递函数h_{ii}，它是如下定义的耦合传递函数矩阵$H(s)$的对角元素。

耦合传递函数（Interaction Transfer Function）（ITF）h_{ki}定义为

$$h_{ki}=\frac{y_k}{r_i}=\frac{y_k}{e_i},\qquad i,k=1,\ 2,\ \cdots,\ m。\tag{1.1}$$

当所有回路除第i个外全部闭合时。m是原系统传递函数矩阵的维数。

h_{ki}就是原开环系统在考虑到所有回路之间的耦合时从回路i到回路k的开环耦合传递函数。

定义以h_{ki}为元素的$m\times m$矩阵$H(s)$为

$$H(s)=[h_{ki}]。\tag{1.2}$$

这一矩阵即为开环耦合传递函数矩阵。

现在令上述第i个回路也闭合，则对所有i，闭环耦合传递函数就是：

$$h'_{ki}=\frac{y_k}{r_i}=\frac{y_k}{e_i+y_i}=\frac{h_{ki}}{1+h_{ii}}。\tag{1.3}$$

本文于1987年10月7日收到。1988年4月18日收到修改稿。

以 h'_{ki} 为元素的矩阵 $H'(s)$ 称为闭环耦合传递函数矩阵。由于所有回路均已闭合，所以 $H'(s)$ 是和原系统的闭环传递函数矩阵 $C(s)$ 全等的，即：

$$C(s)=H'(s)=[h'_{ki}]=[h_{ki}/1+h_{ii}]. \tag{1.4}$$

该式导致了一个多变量系统稳定性判断准则，有如下节所述。

耦合传递函数的计算将在附录中给出。

二、闭环系统的稳定性

设开环系统 S_o 是一具有 m 个输入、m 个输出的多变量系统。它包含控制对象 $G(s)$ 及与之串接的前置、后置校正器 $K(s)$、$L(s)$。这些传递函数矩阵的维数是相容的，即使系统的开环传递函数矩阵

$$Q(s)=L(s)G(s)K(s) \tag{2.1}$$

为 $m\times m$ 维。则其闭环系统，记为 S_c 的回差矩阵 $A(s)$ 为

$$A(s)=[I+Q(s)]. \tag{2.2}$$

设 $\det A$ 以及 A_{ii}，即 A 的（i，i）元素的代数余子式，对所有 i 都不为零以计算耦合传递函数（见附录）。

令复平面 S 上的一条封闭曲线 D 包围全部右半 S 平面。D 由整个 $j\omega$ 轴（从 $\omega=-\infty$ 到 $\omega=+\infty$）及右半 S 平面上半径为无穷大的半圆轨迹构成。这样耦合函数的具有正实部的全部极点和零点都在 D 的包围之中。如果耦合传递函数在原点及虚轴上具有极点（或零点），则可以通过分别作一些半径无限小的半圆使 D 绕过这些极点（或零点）。从方程（1.4）可立即导出闭环系统 S_c 稳定的充要条件。

1. 多变量系统稳定性理论

设耦合传递函数矩阵 $H(s)$ 的所有非对角元素为最小相移函数，且 h_{ii} 有 n_i 个极点在右半平面（n_i 可以用 Routh 判据得到）。h_{ii} 将封闭曲线 D 映射成 Γ_i，即 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时 $h_{ii}(j\omega)$ 的轨迹。如果 Γ_i 反时针包围点（-1，jo）n_i 次则 S_c 是稳定的。

2. 证　明

方程（1.4）表明上述定理指明了闭环传递函数矩阵 $C(s)$ 的对角元素 C_{ii} 的稳定性。又因为非对角耦合传递函数 h_{ki} 是最小相移传递函数，所以闭环传递函数矩阵的非对角元素 c_{ki} 的稳定性是与 c_{ii} 一致的。这是因为 $c_{ki}=h_{ki}/(1+h_{ii})$。换句话说，如果 h_{ki} 是最小相移函数，那么把通常的乃氏稳定判据应用到 h_{ii} 就可以判断闭环传递函数矩阵第 i 列所有元素的稳定性。证明到此结束。

如果 h_{ki} 是非最小相移函数，而且 c_{ii} 是稳定的，那么就要检查一下 c_{ki} 的稳定性。在这情况下如果 h_{ki} 的不稳定极点没有被 h_{ii} 抵消的话，c_{ki} 就是不稳定的。

还可注意到，如果（$1+h_{ii}$）的分子对于每个 i 都是相同的话，则闭环系统的稳定性可以应用乃氏稳定判据到任一对角耦合传递函数 h_{ii} 而得到。当然仍要求非对角耦合传递函数 h_{ki} 都是最小相移函数。这是因为如附录所示我们有 $(1+h_{ii})=\det A/A_{ii}$.

3. 例 1

一单位反馈系统具有前向传递函数矩阵[8]

$$Q(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s}\\ \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{1}{s}\end{pmatrix}.$$

对角优势条件是不满足的。而Rosenbrock 方法的应用取决于构造一个校正器 $K(s)$ 使 $Q(s)$满足对角优势，这正是 Rosenbrock 方法的困难所在。耦合传递函数法可以应用到这个例子。经计算，该系统的耦合传递函数矩阵 $H(s)$为

$$H(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{s-3}{(s+1)(s+1)} & \dfrac{2(s+1)}{s(s+2)}\\ \dfrac{2s}{(s+1)(s+1)} & \dfrac{s-2}{s(s+2)}\end{pmatrix}.$$

这一系统的闭环稳定性可从 h_{11} 或 h_{22} 的乃氏传递轨线得到。因为轨线包围临界点 $(-1, jo)$ 因而是不稳定的。为了确定回路增益的稳定范围可计算回路增益为 k_1, k_2 时的耦合传递函数，

即

$$H(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{k_1(s-3k_2)}{(s+1)(s+k_2)} & \dfrac{2k_1(s+1)}{s(s+1+k_1)}\\ \dfrac{2k_2 s}{(s+1)(s+k_2)} & \dfrac{k_2(s+1-3k_1)}{s(s+1+k_1)}\end{pmatrix}.$$

闭环稳定性可以从 h_{11} 或 h_{22} 得到。例如为使系统稳定，从乃氏传递轨线可知，若 $k_1=1$，则需 $-2<k_2<0$；若 $k_2=1$，则需 $k_1<1/3$。

三、校 正

前置和后置校正器对于改善系统品质的作用是一样的，因此这里仅讨论后置校正器。

考虑用如下形式的校正器来校正第 I 回路。

$$L(s)=\mathrm{diag}[1,\cdots,1,\ l_I,\cdots1,\ \cdots1). \tag{3.1}$$

其作用是将开环传递函数矩阵的第 I 行变为

$$q'_{Ik}=l_I\times q_{Ik} \qquad k=1,2,\cdots,m. \tag{3.2}$$

而其余行保持不变，所以回差矩阵的第 I 行元素的代数余子式保持不变，即

$$A'_{Ik}=A_{Ik}, \qquad k=1,2,\cdots,m. \tag{3.3}$$

这里均以“′”号代表校正后的系统，由附录知，未校正系统第 I 列的耦合传递函数为

$$h_{II}=\sum_{k=1}^{m} q_{Ik}A_{Ik}/A_{II}, \tag{3.4}$$

$$h_{kI}=-A_{Ik}/A_{II}. \tag{3.5}$$

从（3.2）到（3.5）可立即得到校正后的第 I 列耦合传递函数

$$h'_{II}=l_I\times h_{II}, \tag{3.6}$$

$$h'_{kI}=h_{kI}. \tag{3.7}$$

这清楚地显示了用 l_I 来校正第 I 回路时是和单变量系统中的校正器 $l(s)$ 或 $k(s)$ 的作用是一样的。而且有趣的是，第 I 列的非对角耦合传递函数校正前后是不变的。于是我们可以用熟知的单变量系统中的校正技术来设计 l_I，以改善闭环传递函数 c_{II} 的性能。这使我们有可能把多变量系统的校正问题也化为一系列单变量的校正问题。

在校正第 I 个回路时，对其它回路自然是有影响的。但正如下面例子显示的那样，l_I 主要改变第 I 回路的品质而对其它回路影响很小。

现在来看两个例子，以说明如何应用耦合传递函数技术来校正多变量系统。

例 2

该系统具有开环传递函数矩阵[7]

$$Q(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{20}{s(s+2)} & \dfrac{5}{s(s+1)}\\[2ex] \dfrac{10}{s(s+2)} & \dfrac{20}{s(s+1)}\end{pmatrix},$$

它的耦合传递函数矩阵为

$$H(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{20(s^2+s+17.5)}{s(s+2)(s^2+s+20)} & \dfrac{5(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+20)}\\[2ex] \dfrac{10(s+1)}{(s+2)(s^2+s+20)} & \dfrac{20(s^2+2s+17.5)}{s(s+1)(s^2+2s+20)}\end{pmatrix}.$$

从耦合传递函数可以判断系统是稳定的。闭环系统对单位阶跃输入的响应如图 1 所示。为改善其动态特性，分别用

$$l_1=\frac{10(s+2)}{s+20},\qquad l_2=\frac{10(s+1)}{s+20}$$

来校正第1和第2个回路。只校正回路1时系统的单位阶跃响应如图2所示。从图可见，此时只是回路1的特性得到改善，而对回路2影响很小。两个回路均校正后系统的单位阶跃输入响应如图3所示。可见动态性能得到很大改善，且校正回路2时对回路1影响也不大。

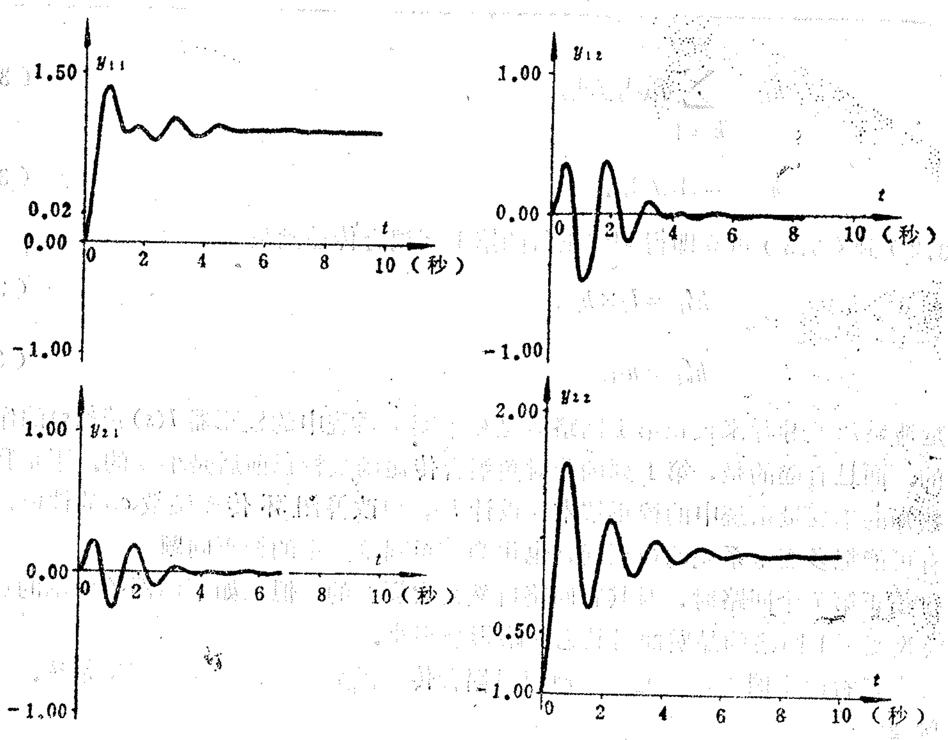

图 1 例2未校正系统的阶跃响应

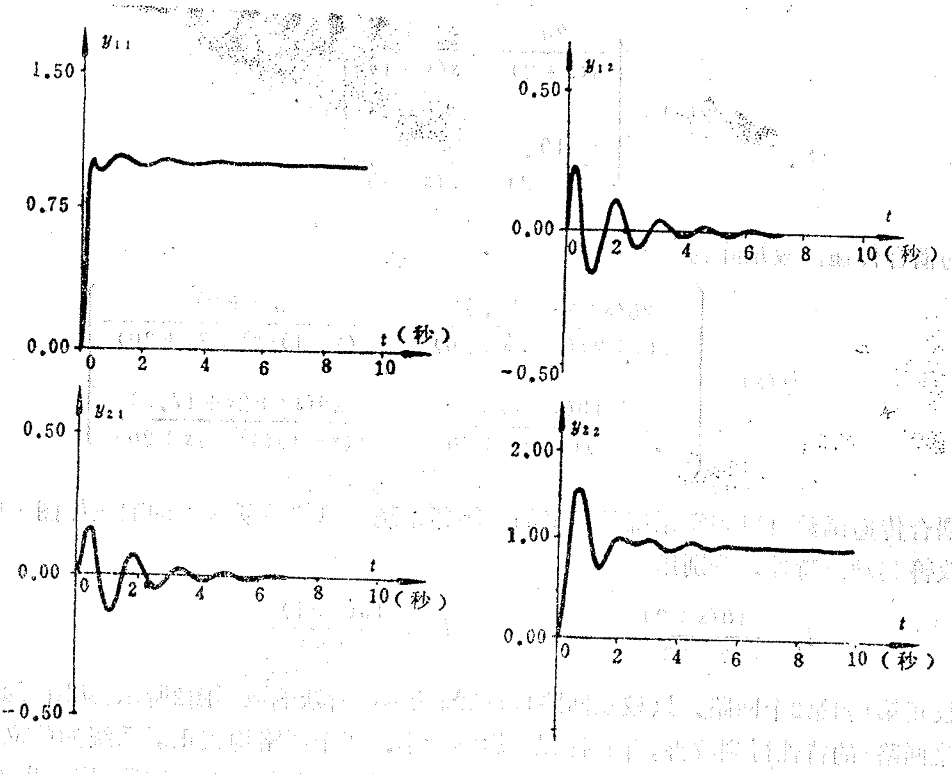

图 2 例2校正回路1后的阶跃响应

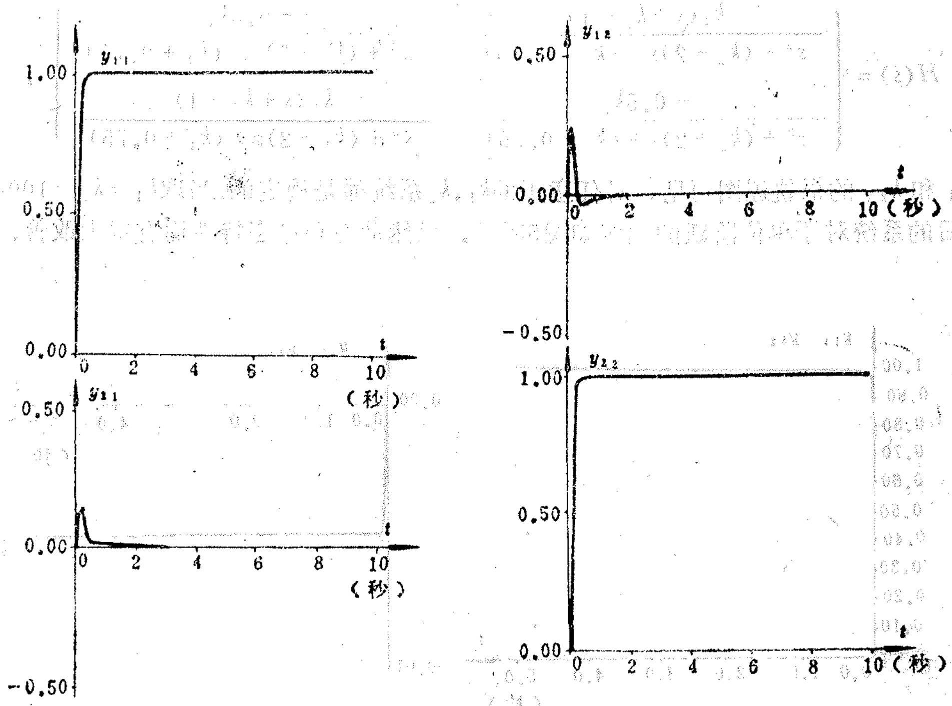

图 3 例2校正两个回路后的阶跃响应

例 3

该系统是Rosenbrock[1]分析过的系统

$$Q(s)=\frac{1}{(s+0.5)(s+1.5)}\begin{bmatrix} s+1 & -0.5 \\ -0.5 & s+1 \end{bmatrix},$$

闭环系统的阶跃响应如图4所示。从图4可见，该系统的稳态特性是很糟的。用耦合传递

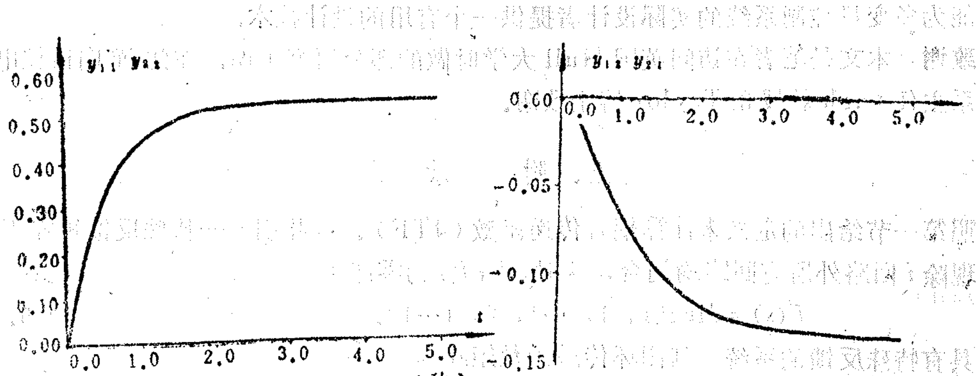

图 4 例3未校正系统的阶跃响应

函数技术分析该系统。当用纯增益校正器来校正该系统时，相应的耦合传递函数矩阵为

$$H(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{k_1(s+k_2+1)}{s^2+(k_2+2)s+(k_2+0.75)} & \dfrac{-0.5k_1}{s^2+(k_1+2)s+(k_1+0.75)}\\ \dfrac{-0.5k_2}{s^2+(k_2+2)s+(k_2+0.75)} & \dfrac{k_2(s+k_1+1)}{s^2+(k_1+2)s+(k_1+0.75)}\end{pmatrix}.$$

从h_{11}和h_{22}的根轨迹图可见，对任意正的k_1，k_2系统都是稳定的。当取$k_1=k_2=100$时，校正后的系统对于单位阶跃的响应如图5所示。显然动态和稳态特性均有很大改善。

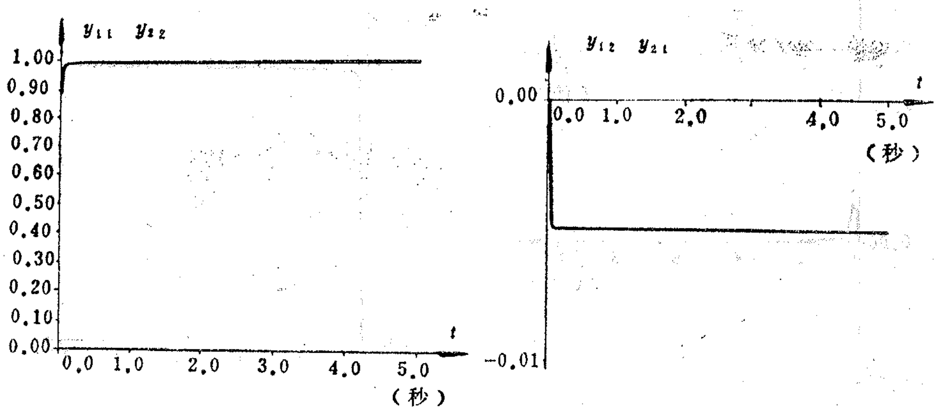

图 5 例3校正两个回路后的阶跃响应

四、结　论

耦合传递函数（ITF）技术可以把多变量系统的设计化为一系列单变量系统的设计问题。特别适用于耦合传递函数为最小相移函数且有（$1+h_{ii}$）的分子对所有i相同这一性质的系统。应用ITF技术不仅可用乃氏判据，也可用根轨迹法或其它方法来判断系统的稳定性。更重要的是ITF具有明显的物理意义，可以直接从系统测试得到。从而可能为多变量控制系统的实际设计者提供一个有用的设计技术。

致谢 本文是笔者在访问英国Hull大学时做的部分研究工作。在此谨向该校电子工程系主任pugh教授和Taylor博士致谢。

五、附　录

照第一节给出的定义来计算耦合传递函数（ITF）。为此引入一特殊反馈矩阵$F(s)$以实现除i回路外所有回路均闭合，这时只需f_{ii}为零即可

$$F(s)=\mathrm{diag}[1,\ 1,\ \cdots 1,\ 0,\ 1\cdots 1]. \tag{5.1}$$

这一具有特殊反馈的系统，其闭环传递函数矩阵为

$$C'(s)=[I+QF]^{-1}Q=A'^{-1}Q, \tag{5.2}$$

A'是该系统的回差矩阵，与A，单位反馈系统的回差矩阵比较后可得

$$\det A'(s)=A_{ii}(s), \tag{5.3}$$

$$A'_{ki}(s)=A_{ki}(s)\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\tag{5.4}$$

A'_{ki}、A_{ki} 分别是 A'、A 的（k、i）元素的代数余子式．从（5.2）到（5.4）可得

$$h_{ii}(s)=\sum_{k=1}^{m}A_{ki}q_{ki}/A_{ii}=q_{ii}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}q_{ki}A_{ki}/A_{ii}.\tag{5.5}$$

从 $\det A$ 的两种展开式，还可得到

$$h_{ii}(s)=q_{ii}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}q_{ik}A_{ik}/A_{ii}.\tag{5.6}$$

为了计算 ITF 矩阵的非对角 ITF 需要一点技巧，因为它很难从(5.2)式中得到．我们有

$$e=[I+FQ]^{-1}r=D^{-1}r,\tag{5.7}$$

e、r 分别为系统的误差输入向量和输出向量，D 为回差矩阵．注意到：

$$e=[-y_1,\ -y_2\cdots-y_{i-1},\ r_i,\ -y_{i+1}\cdots-y_m]^T,\tag{5.8}$$

$$\det D(s)=A_{ii}(s),\tag{5.9}$$

$$D_{ik}(s)=A_{ik}(s),\tag{5.10}$$

则可得到

$$e_k=-y_k=A_{ik}r_i/A_{ii}.\tag{5.11}$$

于是

$$h_{ki}=-A_{ik}/A_{ii}.\tag{5.12}$$

将此式代入到（5.6）式还可得 h_{ii} 与 h_{ki} 联系的公式

$$h_{ii}(s)=q_{ii}-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}q_{ik}h_{ki}.\tag{5.13}$$

参 考 文 献

〔1〕 Rosenbrock, H.H., Design of Multivariable Control Systems Using the Inverse Nyquist Array, IEE Proc., 116,(1969), 1929-1936.

〔2〕 Macfarlane, A.G.J., Belletrutti, J.J., The Characteristic Locus Designe Method, Automatica, 9, (1973), 575-598.

〔3〕 Macfarlane, A.G.J., Kouvaritakis, B., A Design Technique for Linear Multivariable Feedback Systems, Int.J. Control, 25, (1977), 837-874.

〔4〕 Mayne, D.Q., The Design of Linear Multivariable Systems, Automatica, 9:2,(1973), 201-207.

〔5〕 Doyle, C.J., Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical Modern Systems, IEEE Trans., AC-26:1,(1981), 4-11.

〔6〕 Rajnikant, P.V., Munro,N., Multivariable System Theory and Design, Pergamon Press, Oxford, (1977).

〔7〕 Gray, J.O., Taylor,P.M., Frequency Domain Functionals for the Assessment of Interaction Effects in Multivariable Feedback Systems, Proc., IFAC Symposium on CAD Control Systems, Zurich, (1979),81-86.

A New Design Technique for Multivariable Control Systems

Tian Aiping, Zhao Yiqun

(Department of Electrical Engineering, Xian Mining Institute)

Abstract

An Interaction Transfer Fuuction (ITF) matrix H(s) is presented in this paper. The stability of the closed loop system can be investigated from the diagonal elements of H(s), and the improvement of the multivariable system characters can be achieved by directly compensating those diagonal elements of ITF matrix. Thus the design problem of multivariable systems can be reduced to several scalar design problems.