

对Josephson结分叉和混沌现象的仿真研究*

姚 勇 张钟俊

(上海交通大学自动控制系)

摘 要

为了刻画在射频电流作用下Josephson结的动力学特性,本文构造了一个电学模型,同时给出各电学量的物理含义。经过计算机仿真计算,笔者绘制了Josephson结的整体分叉图,由此观察到Josephson结所呈现的分叉、锁频、超敏感性以及混沌等丰富的动力学行为。

一、引 言

现已知道,诸如突变、滞后、混沌、不同步以及失稳等非线性现象都直接或间接地起因于系统稳态解的分叉^[1]。因此系统分叉图象的知识有助于弄清系统的上述复杂行为。就工程应用而言,分叉图可用来设计具有所需特征的非线性动态系统或者为系统进行有效的控制提供依据。正如熟悉经典控制工程的学者们一定曾体会到Nyquist图、Bode图对于设计一个稳定控制器的重要性一样^[2]。本文借助于我们的求解分叉问题的程序包,讨论了一个极为重要的器件——Josephson结的动力学特性^[3]。

众所周知,当“能隙”满足一定条件的两块超导材料经一极薄的绝缘夹层贴合在一起时,便形成了一个Josephson结。这种导体—绝缘体—导体的夹心结构就会在低温下(温度低于临界温度)产生“隧道效应”——超导电流能够穿过绝缘层而不引起电压降,被两侧超导体夹住的极薄的绝缘层好象也具有超导电性似的。此效应起因于两超导电子的波函数的耦合,从而呈现超导电流的干涉现象。

由于Josephson结器件对微小磁通极为敏感以及它的比晶体管快得多的开关特性,使得该器件在诸如超灵敏检测器、超快速计算机方面展现出乐观的应用前景。近年来,人们发现Josephson结还有其它的动力学特性^{[4]~[7]}。这里我们在应用的基点上,讨论Josephson结的动力学行为。第二节引进一个电学模型;第三节绘制整体分叉图;第四节讨论相图特征以及混沌与对称性破缺的关系。

二、电 学 模 型

用电学系统来模拟Josephson结的意义,在于能揭示各物理量与人们已熟悉了的电学量之间的关系;使得原本要在极端物理条件下才能发生的现象,可在常态下发生。这

*国家教委高等学校科学技术基金资助的项目。

本文于1986年2月19日收到。1987年10月31日收到修改稿。

些对于Josephson结器件在微电子学领域以及工业测量中的应用无疑是有益的。L.O. Chua等人曾于1983年提出过一个电学模型^[4]，现在的问题是该模型不能用以描述在射频电流作用下的Josephson结。原因是模型中尚未反映干涉电流的存在，而干涉电流的存在性业已被实验所证实。因此为了研究射频电流作用下Josephson结的动力学行为，一个更加符合实际的电学模型如图1所示。

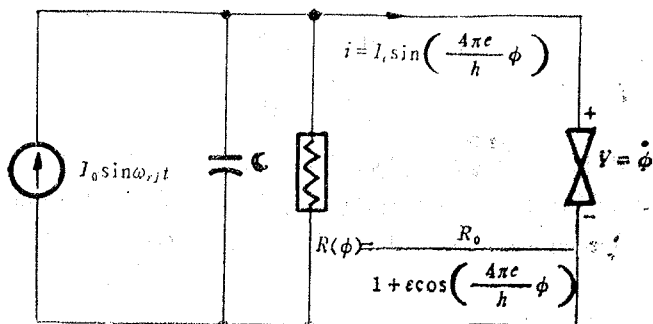


图1 一个由射频电流驱动的Josephson结电学模型

电路中的基本元件是一个由式

$$i = I_c \sin \left(\frac{4\pi e}{h} \phi \right) \quad (1)$$

描述的非线性电感器和一个由式

$$R(\phi) = \frac{R_0}{1 + \epsilon \cos \left(\frac{4\pi e}{h} \phi \right)} \quad (2)$$

描述的非线性电阻器，其中 ϕ 代表磁通量， h 是Plank常数， e 是电子电荷， R_0 是对应于无射频电流作用下、Josephson结的结电阻。 ϵ 称为干涉系数，它与射频电流的频率 ω_{rf} 及幅值 I_0 有关。在通常频率下， ϵ 的实验数据近于 -0.8 ^[7]。此外模型中还有一个线性元件——结电容器， C 是结电容值。

正是由于结的等效非线性电感和结电容的存在，当直流信号加到Josephson结的两端时，才可在实验中观察到结的电磁辐射。该现象的一个直接用途是感应微弱的磁通量。

上面引进的电学模型，其合理性可从两个方面来看：当激励的射频电流为0时，因 $\epsilon = 0$ ，故 $R(\phi) = R_0$ ，此时模型退化为Chua模型；再在射频电流存在的情况时，根据基尔霍夫电流、电压定律，容易列出描写电路的微分方程

$$C \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{1 + \epsilon \cos \left(\frac{4\pi e}{h} \phi \right)}{R_0} \frac{d\phi}{dt} + \frac{I_c}{2\pi} \sin \left(\frac{4\pi e}{h} \phi \right) = \frac{I_0}{2\pi} \sin \omega_{rf} t, \quad (3)$$

而与(3)相应的无量纲化方程如下：

$$\ddot{x} + \alpha(1 + \varepsilon \cos x)\dot{x} + \sin x = \beta \sin \omega t. \quad (4)$$

方程(4)与文献[5]中对 McCumber 模型修正所得的数学模型一致。这种一致性使得我们能够在[5]的基础上构成本文。

三、整体分叉图

将(4)写成状态方程的形式

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha(1 + \varepsilon \cos x_1)x_2 - \sin x_1 + \beta \sin \omega t. \quad (6)$$

令 $\alpha = -0.4$, $\varepsilon = -0.8$, $\beta = 0.7999$, 借助于我们求解分叉问题的程序包, 便能求出 Josephson 结的稳态响应, 即稳态时, Josephson 结的输出电压 x_2 随射频电流的角频率 ω_{rf} 的变化*, 并得到它的整体分叉图(见图2)。

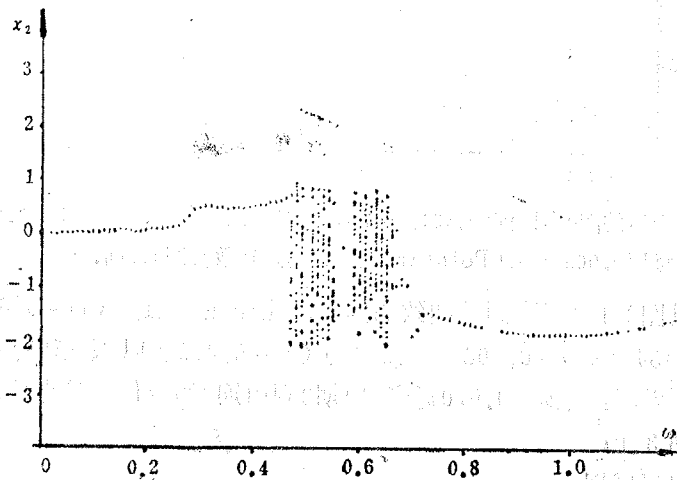


图2 Josephson 结电学模型的整体分叉图, $\alpha = -0.4$, $\varepsilon = -0.8$, $\beta = 0.7999$,

$$x_2 = \dot{x} = \frac{4\pi e}{h} \dot{\phi} = \frac{4\pi e}{h} v$$

图2中对固定的 ω 值有一系列点与之相对应, 这些点是相应于该 ω 值、方程(5)——(6)之稳态解分量 x_2 的Poincaré映象。我们知道, Poincaré映射的点数就是相应解的周期数, 因此当 ω 从1.2变至0.0时, Josephson 结的分叉过程大致如下:

周期1解 ($0.69 \leq \omega \leq 1.2$) $\rightarrow$ 周期2解 (ω 位于0.68近旁)

* 仿真时变化的量是 ω , 但在无量纲化过程中, 采用了 $\omega = \omega_{rf}/\omega_0$, 其中 ω_0 称为结等离于体振荡角频率, 是与构成 Josephson 结的超导材料有关的量。Josephson 结器件一经制

成, $\omega_0 = \left[\left(\frac{4\pi e I_c}{hC} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$ 可视作常值。因而改变 ω 就等于改变 ω_{rf} 。

→ 周期3解 (ω 位于 0.67 近旁) → 混沌 ($0.59 \leq \omega \leq 0.66$)

→ 周期1解 ($0.57 \leq \omega \leq 0.58$) → 周期2解 (ω 在 0.56 近旁)

→ 混沌 ($0.51 \leq \omega \leq 0.55$) → 周期3 (ω 位于 0.50 近旁)

→ 混沌 ($0.47 \leq \omega \leq 0.49$) → 周期1解 ($0.0 \leq \omega < 0.47$),

其中虚箭头代表可能存在着的中间过程, 这可以通过局部放大来进一步分辨. 图 3 是将图 2 中区间 $[0.451, 0.731]$ 所对应的那部分图形放大而得.

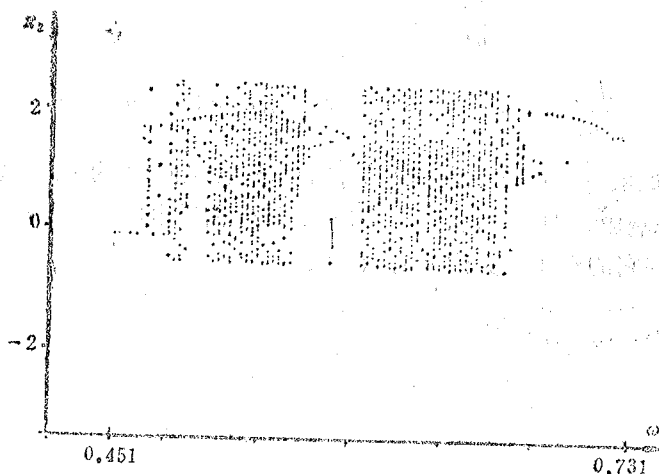


图 3 放大后的图 2 中区间 $[0.451, 0.731]$ 所对应的分叉图, 其步长为 0.003, 即每隔 0.003 取一次 Poincaré 映射. 其余参数与图 2 相同.

明显地, 通过图 3 可以观察到较细致的结构. 比如在第 11 点 ($\omega = 0.697$), 第 16 点 ($\omega = 0.682$), 第 54 点 ($\omega = 0.568$), 第 85 点 ($\omega = 0.475$) 以及第 88 点 ($\omega = 0.466$) 处发生突跳. 还可发现: 在 $\omega = 0.670$ 近旁, 周期 2 到周期 3 的变化不是直接的, 可能要经历混沌而后锁在周期 3 上; 在 $\omega = 0.475$ 附近出现周期 3 解且在其左右均为周期 1 解. 另外还在 $\omega = 0.619$ 附近观察到周期 5 解; 在 $\omega = 0.556$ 处出现周期 4 解, 故有可能在 $[0.568, 0.540]$ 区间上会经历一次倍周期分叉而进入混沌过程; 而在 $\omega = 0.466$ 处, 我们还看到了周期 2 解.

为能观察到 Josephson 结更精细的结构, 再次将区间 $[0.6520,$

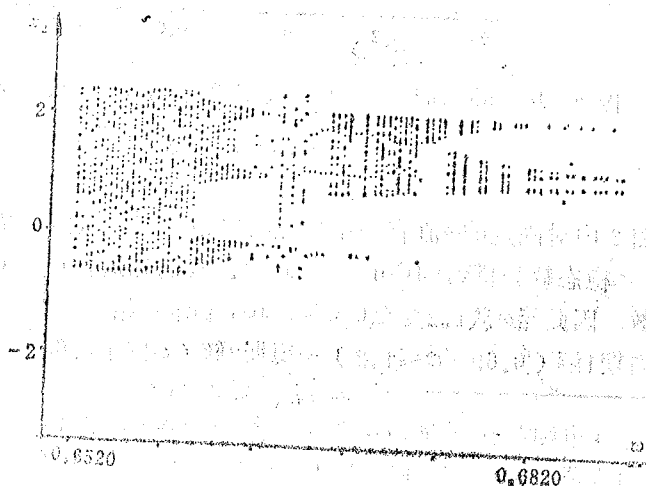
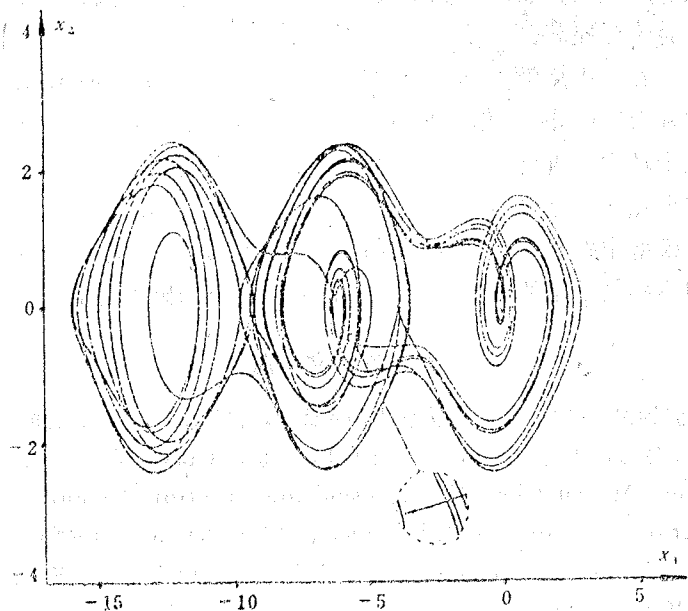
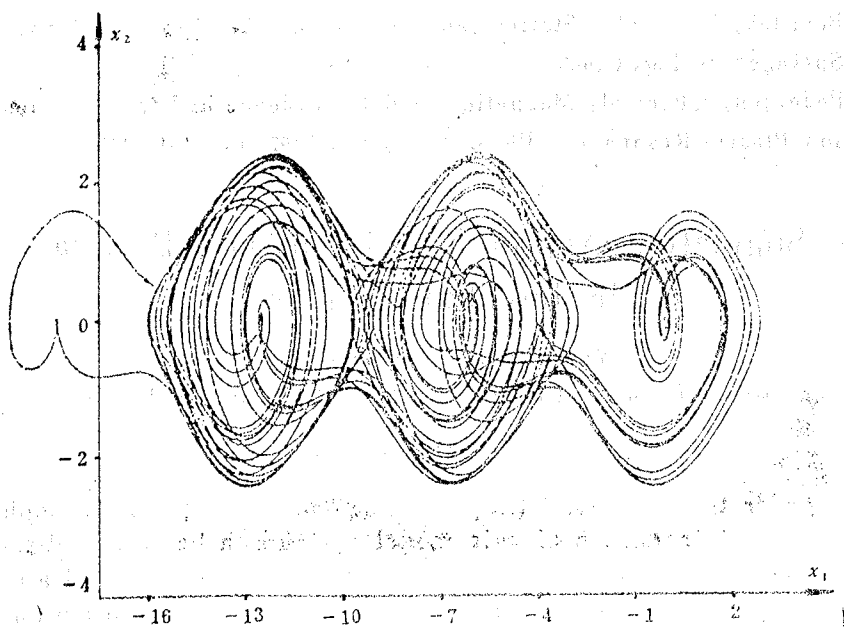


图 4 区间 $[0.6520, 0.6820]$ 再次放大后所得的分叉图, 此处步长为 0.0003. 其余参量值与图 2 相同.

0.6820]放大(见图4)。在图4中上述突跳现象更为显著,并可以发现:周期3解出现得最为频繁。随着 ω 由大变小,分叉图会出现三个主枝干,它们通过混沌合在一起,再经



(a) 由画1000个点改画3000个点



(b) 由画1000个点改画6000个点

图5 Josephson结的相图($\alpha = -0.4$, $\varepsilon = -0.8$, $\beta = 0.7999$, $\omega = 0.68$, 积分步长为0.1)

周期3的锁频后,又可能引出三条主枝干…….

类似的放大过程自然还可以进行下去,不过计算机的分辨力终究是有限的.当放大倍数超过某一临界放大系数后,得到结果的可信度要降低;原因是在那种情况下,误差所致的涨落效应会十分显著.

前面已说过,在各周期解之间夹着混沌解.图5展示的Josephson结中的混沌解比通常的有所不同,称为扩展混沌解(Propagating Chaotic Solution).从图5a看来,该解似乎要在三个环中一直绕下去.可是当我们继续观察解的后继运动(由画后3000个点,改画后6000个点),结果会发现解突然“长出”一个环.

本文从电学模型出发研究了Josephson结的动力学,其目的是想用该模型取代真实的超导结.模型不必具备结的所有特性,但必须具有我们感兴趣的那一部分特性.

参 考 文 献

- [1] 姚勇、张钟俊,自然、社会及人脑中的非线性,自然杂志,9:11,(1986),987-994.
- [2] 钱学森、宋健,工程控制论,科学出版社,北京,(1983).
- [3] Odyniec, M. and Chua, L. o., Josephson-junction Circuit Analysis Via Integral Manifolds, IEEE Trans., ACS-30:5, (1983), 308-320.
- [4] 汪子丹、姚希贤, Josephson结构的动力学行为(I)、(II),物理学报,34:9(1985),1140.
- [5] McCummoer, D. E., Effect of a.c. Impedance on d.c. Voltage-current Characteristics of Superconductor Weak-link Junctions J. Appl. Phys., 39, (1968), 3113-3124.
- [6] Benedek, G. et al, Statics and Dynamics of Nonlinear Systems, Springer-verlag, (1983).
- [7] Pedersen, N. F. et al, Magnetic Field Dependence and Q of the Josephson Plasma Resonance, Phys. Rev., B6, (1972), 4151-4157.

The Simulation Approach of Chaos and Bifurcations in Josephson-junction

Yao Yong, Zhang Zhongjun

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University)

Abstract

In order to understand the meaning of a typical Josephson junction, we introduce a circuit model which can be used to describe the dynamical behavior of the junction under the exciting of a radio frequency current. In this paper the global bifurcation diagram of the Josephson Junction is demonstrated with computer simulation. Through that diagram, we may observe the complex and rich dynamics of the junction, e. g., bifurcation, phase-locking and chaos.