第5卷 第4期 控制理论与应用 Vol.5, No.4
1988年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec., 1988

输入函数的参数偏离时最优简化模型的一类误差估计

邵 剑 王茂华
（浙江大学数学系，杭州） （宁波师范学院数学系）

摘 要

当大系统的输入函数的初始参数发生偏离时，其最优简化模型的近似模型可以利用输入函数的渐近展开得到。本文提出高阶模型和其最优简化模型的近似模型之间近似程度的一种估计。

高阶模型的最优简化是大系统理论中一个新的课题。文〔1—6〕已证明了在各种函数输入时高阶模型在二次性能指标意义下都可以得到其最优简化模型，且当高阶模型的输入函数含有初始参数时，它的最优简化模型是与该参数有关的。本文考虑当参数发生偏离时，原来高阶模型和其最优简化模型的近似模型之间近似程度的估计问题。

一、输入函数含参数时高阶模型的最优简化

考虑渐近稳定的高阶定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu, \quad x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$u = \begin{cases} Vu, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

$x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^m$, $u \in R^1$; $V \in R^p$ 是实常向量；A、B、C是相应阶数的实常数矩阵。本文所讨论的模型最优简化问题是求高阶模型（1）、（2）的最优简化模型

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u, \quad x_r(0) = 0 \\ y_r(t) = C_r x_r(t) + N_r u, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $x_r(t) \in R^r$, $y_r(t) \in R^m$, $m \leqslant r < n$; N_r 是作用于输入 u 的线性微分算子；A_r、B_r、C_r 是相应阶数的实常数矩阵，同时对于给定的输入u使得性能泛函

$$J = \int_0^\infty [y(t) - y_r(t)]^T [y(t) - y_r(t)] dt \tag{4}$$

达到最小。

本文于1987年8月26日收到。1988年4月8日收到修改稿。

本文考虑输入 u 含有实参数 ω 的高阶模型的最优简化问题，即输入函数 $u=u(t,\omega)$，设它关于 ω 是 $u\in C^{(2)}$ 的，ω 属于某一闭区间 I。对于输入函数的参数 ω 发生小偏离 ε 的情形，即 $u=u(t,\ \omega+\varepsilon)$。因为

$$u(t,\ \omega+\varepsilon)=u(t,\ \omega)+\varepsilon\frac{du(t,\ \omega)}{d\omega}+O(t,\ \omega;\ \varepsilon^2).$$

所以对充分小的偏离 ε 和任意给定的 $T>0$，在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上高阶模型（1）在 $u=u(t,\omega+\varepsilon)$ 输入时的简化模型可以用其渐近展开式

$$u=u(t,\ \omega)+\varepsilon\frac{du(t,\ \omega)}{d\omega} \tag{5}$$

输入时的简化模型来近似。

由文〔4〕知道，两个控制系统称为是等价的，如果这两个控制系统具有相同的输出。在不同的函数输入时，系统（1）、（2）都有其相应的等价系统，且等价系统具有叠加性性质。设在 $u=u(t,\ \omega)$ 和 $u=\dfrac{du(t,\ \omega)}{d\omega}$ 输入时系统（1）的等价系统分别是

$$\begin{cases}\dot{\zeta}_i(t)=A\zeta_i(t)+F_i(A)G_i^{-1}(A)BV\delta(t),\\ z_i(t)=C\zeta_i(t)+CN_i(A)BV\dfrac{d^{i-1}}{d\omega^{i-1}}u(t,\ \omega),\ i=1,\ 2,\end{cases} \tag{6}$$

式中 $F_i(A)$，$G_i(A)$，$i=1,2$，是 A 的矩阵多项式；微分算子

$$N_j(A)=\sum_{i=0}^{k}M_{n-i,j}(A)\widetilde{M}_{n-i,j}^{-1}(A)\frac{d^i}{dt^i},\quad j=1,\ 2,$$

其中 $M_{n-i,j}(A)$、$\widetilde{M}_{n-i,j}(A)$，$i=0,\ 1,\ \cdots,k,j=1,\ 2$，是 A 的矩阵多项式。在函数（5）输入时系统（1）的等价系统是

$$\begin{cases}\dot{\zeta}(t)=A\zeta(t)+[F_1(A)G_1^{-1}(A)+\varepsilon F_2(A)G_2^{-1}(A)]BV\delta(t),\\ z(t)=C\zeta(t)+C[N_1(A)BVu(t,\ \omega)+\varepsilon N_2(A)BV\dfrac{du(t,\ \omega)}{d\omega}].\end{cases} \tag{7}$$

在各种函数输入时高阶模型（1）在本节意义下的最优简化问题都可以归结为在脉冲函数输入时其瞬态部分的最优简化问题[1-6]。现在考虑系统（6）和（7）的瞬态部分，即相应的各输出方程是 $z_1'(t)=C\zeta_1(t)$，$z_2'(t)=C\zeta_2(t)$，$z'(t)=C\zeta(t)$。按算法〔6〕，假设它们都可以得到相应的最优简化模型，分别是

$$\begin{cases}\dot{\zeta}_{ri}(t)=A_{ri}\zeta_{ri}(t)+F_i(A_{ri})G_i^{-1}(A_{ri})B_{ri}V\delta(t),\\ z_{ri}'(t)=C_{ri}\zeta_{ri}(t),\quad i=1,\ 2;\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}\dot{\zeta}_r(t)=A_r\zeta_r(t)+[F_1(A_r)G_1^{-1}(A_r)+\varepsilon F_2(A_r)G_2^{-1}(A_r)]B_rV\delta(t),\\ z_r'(t)=C_r\zeta_r(t),\end{cases} \tag{9}$$

其中$\xi_{r1}(t)$、$\xi_{r2}(t)$、$\xi_r(t)\in R^r$；$z'_{r1}(t)$、$z'_{r2}(t)$、$z_r(t)\in R^m$，$m\leqslant r<n$。要注意的是（9）式中的A_r、B_r、C_r是与偏离ε有关的，而（8）式中的A_{ri}、B_{ri}、C_{ri}，$i=1, 2$，与偏离ε无关。

在系统（8）、（9）中分别加上（6）、（7）相应的稳定状态部分，经整理并根据等价性就得到在$u(t, \omega)$、$\dfrac{du(t,\omega)}{d\omega}$和$u(t, \omega)+\varepsilon\dfrac{du(t,\omega)}{d\omega}$输入时系统（1）的最优简化模型，它们相应是

$$\begin{cases}\dot{x}_{ri}(t)=A_{ri}x_{ri}(t)+B_{ri}\dfrac{d^{i-1}}{d\omega^{i-1}}u(t, \omega),\\ y_{ri}(t)=C_{ri}x_{ri}(t)+W_i,\\ W_i=[CN_i(A)B-C_{ri}N_i(A_{ri})B_{ri}]V\dfrac{d^{i-1}}{d\omega^{i-1}}u(t, \omega),\quad i=1, 2;\end{cases}\tag{10}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_r(t)=A_rx_r(t)+B_r\left[u(t,\omega)+\varepsilon\dfrac{du(t,\omega)}{d\omega}\right],\\ y_r(t)=C_rx_r(t)+W\\ W=[CN_1(A)B-C_rN_1(A_r)B_r]Vu(t,\omega)+\varepsilon[CN_2(A)B-C_rN_2(A_r)B_r]V\dfrac{du(t,\omega)}{d\omega}.\end{cases}\tag{11}$$

这样，模型（11）近似地表示了在$u(t, \omega+\varepsilon)$输入时高阶模型（1）的最优简化模型。

二、输入函数的参数偏离时最优简化模型的误差估计

下面讨论当输入函数的参数ω的偏离ε发生变化时高阶模型（1）和其最优简化的近似模型（11）之间的近似程度的变化情况。应注意的是，本文所关心的只是这种近似程度随ε变化的情形。这种近似程度，显然可以以两系统的输出之差$\|y(t)-y_r(t)\|$来表示。这里的模取为

$$\|y(t)-y_r(t)\|=\left\{\int_0^T[y(t)-y_r(t)]^T[y(t)-y_r(t)]\,dt\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{12}$$

其中$y(t)$是$u=u(t, \omega+\varepsilon)$输入时系统（1）的输出，$y_r(t)$是系统（11）的输出。

由上面的推导可见，$\|y(t)-y_r(t)\|$是由两部分构成：第一部分是系统（7）瞬时状态部分和其得到的最优简化模型（9）之间产生的输出误差，即$\|z'(t)-z'_r(t)\|$，它与偏差ε有关；第二部分是由输入函数$u(t, \omega+\varepsilon)$和其渐近展开式（5）之间的误差所产生的输出误差。

以下分别讨论之。

因为已设系统（7）的瞬时状态部分可以得到其最优简化模型（9），所以它的最优化性能指标$J=J(A_r, B_r, C_r)$达到最小，从而

$$\|z'(t)-z_r'(t)\|^2\leqslant\int_0^\infty[z'(t)-z_r'(t)]^T[z'(t)-z_r'(t)]dt\equiv J(A_r,B_r,C_r)$$

$$=\int_0^\infty[f_1(A,B,C)+\varepsilon f_2(A,B,C)-f_1(A_r,B_r,C_r)-\varepsilon f_2(A_r,B_r,C_r)]^T$$

$$\cdot[f_1(A,B,C)+\varepsilon f_2(A,B,C)-f_1(A_r,B_r,C_r)-\varepsilon f_2(A_r,B_r,C_r)]dt$$

$$\leqslant\int_0^\infty\{[f_1(A,B,C)-f_1(A_{r1},B_{r1},C_{r1})]+\varepsilon[f_2(A,B,C)-f_2(A_{r2},B_{r2},C_{r2})]\}^T$$

$$\cdot\{[f_1(A,B,C)-f_1(A_{r1},B_{r1},C_{r1})]+\varepsilon[f_2(A,B,C)-f_2(A_{r2},B_{r2},C_{r2})]\}dt$$

$$\leqslant(K_1+K_2|\varepsilon|)^2, \tag{13}$$

其中

$$f_i(A,B,C)=C\int_0^t e^{A(t-\tau)}F_i(A)G_i^{-1}(A)BV\delta(\tau)d\tau,\quad i=1,\ 2,$$

$$K_i=\left\{\int_0^\infty[f_i(A,B,C)-f_i(A_{ri},B_{ri},C_{ri})]^T[f_i(A,B,C)-f_i(A_{ri},B_{ri},C_{ri})]dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$i=1,\ 2. \tag{14}$$

显然，实数K_i是系统（6）的瞬态部分最优简化为（8）时相应性能指标（4）的最小值，且都是与偏离ε无关的确定常数。综述之，便有以下定理。

定理 1 在函数（5）输入时，系统（1）的等价系统（7）的瞬时状态部分如果能简化为模型（9），那么它们的输出$z'(t)$和$z_r'(t)$满足

$$\|z'(t)-z_r'(t)\|\leqslant K_1+K_2|\varepsilon|. \tag{15}$$

若不考虑偏离ε等于零时所产生的输出误差；则定理1中输出之差满足

$$\|z'(t)-z_r'(t)\|\leqslant K_2|\varepsilon|. \tag{15'}$$

下面讨论第二部分误差。为此，记

$$u(t,\omega+\varepsilon)-u(t,\omega)-\varepsilon\frac{du(t,\omega)}{d\omega}=\varepsilon^2\eta(t,\omega_1),$$

其中 $\eta(t,\omega_1)=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2u(t,\omega+\theta\varepsilon)}{d\omega^2}$，$0<\theta<1$。考虑系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t)=A\tilde{x}(t)+\varepsilon^2BV\eta(t,\omega_1),\ \tilde{x}(0)=0,\\ \tilde{y}(t)=C\tilde{x}(t).\end{cases} \tag{16}$$

设M是将矩阵A变换为若当型矩阵J的变换矩阵，即$M^{-1}AM=J$，其中A的特征值λ_i的重数为n_i，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，相应的若当块矩阵为J_i，且$\sum_{i=1}^k n_i=n$。而（16）的解为

$$\tilde{x}(t)=\varepsilon^2\int_0^t e^{A(t-\tau)}BV\eta(\tau,\omega)\,d\tau=\varepsilon^2\int_0^t Me^{J(t-\tau)}M^{-1}BV\eta(\tau,\omega)d\tau$$

$$=\varepsilon^2MH(t)P, \tag{17}$$

其中　n维常数向量$P=M^{-1}BV$，$n\times n$阶函数矩阵

$$H(t)=\int_0^t e^{J(t-\tau)}\eta(\tau,\omega)d\tau.$$

记$n\times n$阶常数矩阵$Q=M^TC^TCM$。它们的元素用相同字母的小写加下标表示。把矩阵$H(t)$、P、Q分块使对应块的阶数和n_i一致。函数$\eta(t,\omega_1)$关于参数ω_1在I上恒为有界，记

$$\tilde{\eta}(t)=\max_{\omega_1\in I}|\eta(t,\omega_1)|.$$

注意到$H(t)$元素$h^i_{rs}(t)$，$i=1,2,\cdots,k$；$r,s=1,2,\cdots,n_i$，的表达式，则以

$$\tilde{h}^i_{rs}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(s-r)!}\displaystyle\int_0^t\tilde{\eta}(\tau)(t-\tau)^{s-r}e^{\lambda_i(t-\tau)}d\tau, & r\leqslant s\leqslant n_i,\\ 0, & s<r\leqslant n_i,\ i=1,2,\cdots,k,\end{cases}\tag{18}$$

的绝对值为元素构成的相应矩阵记为$\tilde{H}(t)$。以P、Q中元素的绝对值为相应元素所构成的对应矩阵记为$\tilde{P}$、$\tilde{Q}$。容易证明

$$\begin{aligned}\|\tilde{y}(t)\|^2=\|C\tilde{x}(t)\|^2&\leqslant\varepsilon^4\int_0^T|P^TH^T(t)QH(t)P|\,dt\\&\leqslant\varepsilon^4\int_0^T\tilde{P}^T\ \tilde{H}^T(t)\tilde{Q}\tilde{H}(t)\tilde{P}dt.\end{aligned}\tag{19}$$

显然，系统（16）的输出$\tilde{y}(t)$正是相应于$u(t,\omega+\varepsilon)$和式（5）分别输入时系统（1）的输出之差，它表示以式（5）近似代替$u(t,\omega+\varepsilon)$输入时系统（1）所产生的输出误差。

定理 2　在函数$u(t,\omega+\varepsilon)$和其渐近展开式（5）分别输入时，系统（1）的输出之差

$$\|\tilde{y}(t)\|\leqslant K_0\varepsilon^2,\tag{20}$$

其中

$$K_0=\left(\int_0^T\tilde{P}^T\ \tilde{H}^T(t)\tilde{Q}\tilde{H}(t)\tilde{P}dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理 3　在函数$u(t,\omega+\varepsilon)$输入时的高阶模型（1）和其近似的最优简化模型（11）的输出之差

$$\|y(t)-y_r(t)\|\leqslant K_1+K_2|\varepsilon|+K_0\varepsilon^2.\tag{21}$$

若不考虑在函数$u(t,\omega)$，$\varepsilon=0$，输入时所产生的输出误差，则定理3中相应的输出之差

$$\|y(t)-y_r(t)\|\leqslant K_2|\varepsilon|+K_0\varepsilon^2.\tag{21$'$}$$

三、结　论

本文给出的系统输出的误差估计是对输入函数参数ω的偏离ε而言。上述第二部分

误差，即由输入函数$u(t,\omega+\varepsilon)$和其渐近展开式（5）之间的误差所产生的系统输出误差（20）对我们来说是不重要的。另一方面说明，以式（5）近似输入函数$u(t,\omega+\varepsilon)$，在其系统（1）的最优简化中是可行的。

如果输入函数含有多个参数时，同样问题可以用类同于本文的方法作出误差估计。如果输入向量函数的各分量为不同类型函数时，那么多输入多输出系统的类似输出误差估计将另文给出。

参考文献

〔1〕 Wilson, D. A., Optimum Solution of Model-Reduction Problem, Proc. IEE, 117,(1970), 1161-1165.

〔2〕 Wilson, D. A. and Mishra, R. N., Optimal Reduction of Multivariable System, Int. J. Control, 29, (1979), 267-278.

〔3〕 张钟俊、白尔维，正弦函数输入时高阶模型的最优简化，控制理论与应用，1:1, (1984), 79-86.

〔4〕 邵剑，高阶模型最优简化的积分平方误差法的若干性质，控制理论与应用，3:2, (1986), 70-79.

〔5〕 邵剑，多输入多输出系统的模型简化，自动化学报，12:2, (1986), 190-194.

〔6〕 Mishra, R. N. and Wilson, D. A., A New Algorithm for Optimal Reduction of Multivariable Systems, Int. J. Control, 31, (1980), 443-466.

〔7〕 张钟俊等，多项式输入无稳态输出误差时的最优简化模型，应用科学学报，1:2, (1983), 111-119.

An Error Estimate to the Optimal Reduced Model

Shao Jian

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou)

Wang Maohua

(Department of Mathematics, Ningbo Teacher's College)

Abstract

When parameters of the input of a large scale system deviate, its approximate reduced order model can be obtained by using the asymptotic expansion of the input function. In this paper, an error estimate between the original system and its approximate optimal reduced model is given.