第5卷 第4期
1988年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.4
Dec., 1988

线性方程 $X=EXD+F$ 的解析算法

付明义

（哈尔滨船舶工程学院航天工程系）

摘　要

本文提出了一种新的关于线性矩阵方程 $X=EXD+F$ 的解析算法．该算法利于在计算机上计算．而且所需计算机存贮容量小，计算速度快．文中还提出了 $X=EXD+F$ 的解唯一的等价定理．

一、前　言

关于线性方程

$$X=EXD+F \tag{1}$$

的求解和解的性质，在文献〔1〕中已研究过．但对该方程求解所用的只是解析法和逼近法．解析法需对线性方程重新组合得到 $m\times n$ 阶的线性方程组（m、n 分别为方块矩阵 E、D 的阶数），在 m、n 均很大时，这种方法在存贮量和计算时间方面都是不足取的．逼近法的解的精度取决于矩阵 E 和 D 的性质．本文提出了一种求（1）式的解析解的递推算法．该算法表达形式简单，利于在计算上计算，而所需计算机存贮量小，计算速度快，特别，如果设 $m=n$，$D=A$，$E=A^T$ 和 $F=Q$（而 $Q=Q^T$），则（1）式变成

$$X=A^TXA+Q. \tag{2}$$

线性方程（2）在离散系统的综合和设计中起着重要作用[2-4]．关于（2）的解，有的文献通过线性变换转化成李雅普诺夫方程来求解．

下面只讨论（1）式的解，对其特殊形式（2）的解不加讨论．

二、算法原理

下面讨论，对于给定矩阵 $D\in R^{n\times n}$，$E\in R^{m\times m}$，$F\in R^{m\times n}$，满足线性方程式

$$X=EXD+F \tag{3}$$

的矩阵 X 的解．

为求（1）式的解，令

$$\left.\begin{array}{l} X_1=X \\ X_2=XD \\ X_i=XD^{i-1} \\ (i=3,\ 4,\cdots,n) \end{array}\right\}. \tag{4}$$

本文于1987年3月27日收到．1988年1月5日收到修改稿．

因此（1）式变为

$$X_1=EX_2+F. \tag{5a}$$

（1）式两边右乘D得

$$X_2=EX_3+FD. \tag{5b}$$

同理可得

$$\left.\begin{aligned} X_i&=EX_{i+1}+FD^{i-1}\\ i&=3,\ \cdots,\ n-1\\ X_n&=EX_nD+FD^{n-1}\\ &=EX_{n+1}+FD^{n-1}\end{aligned}\right\}, \tag{5c}$$

其中 $X_{n+1}=X_nD=XD^n$.

设矩阵D的特征多项式为

$$\varphi(s)=\sum_{i=0}^{n}a_is^i\quad(a_n=1), \tag{6}$$

则（$5c$）中的最后一式可化简为

$$\begin{aligned} X_n&=EX_{n+1}+FD^{n-1}\\ &=EXD^n+FD^{n-1}\\ &=EX\left(-\sum_{i=0}^{n-1}a_iD^i\right)+FD^{n-1}\\ &=-\sum_{i=0}^{n-1}a_iEX_{i+1}+FD^{n-1}. \end{aligned} \tag{5d}$$

（$5d$）式中第三等式可由凯莱－哈密顿定理推得.

由（$5a$），（$5b$），（$5c$），（$5d$）式可得矩阵方程组

$$\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & E & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_0E & -a_1E & -a_2E & \cdots & -a_{n-1}E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} F\\ FD\\ \vdots\\ FD^{n-1}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

（7）式的解可写成

$$\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & -E & 0 & \cdots & 0\\ 0 & I & -E & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_0E & a_1E & a_2E & \cdots & a_{n-1}+I\end{pmatrix}^{-1}+\begin{pmatrix} F\\ FD\\ \vdots\\ FD^{n-1}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

因为矩阵方程（1）的解$X=X_1$，因此我们只要从（8）式中求得X_1的解即可

定理 1 X_1的解可通过如下线性变换求得

$$\begin{pmatrix} I & -E & 0 & \cdots & 0 & \vdots & F \\ 0 & I & -E & \cdots & 0 & \vdots & FD \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0E & a_1E & a_2E & \cdots & a_{n-1}E+I & \vdots & FD^{n-1} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{行变换}}$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & X \\ 0 & I & -E & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中X即为（8）式中X_1的解，$*$为任意常数矩阵。

定理显然。

为实现（9）式中的行变换，我们可经过如下步骤实现（其中B_i、C_i、A_i为相应维数的矩阵）

$$(\text{I})\quad \left.\begin{aligned} B_i &= -C_{i-1}FD^{i-1}+B_{i-1} \\ C_i &= a_iE+EC_{i-1} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \\ & B_0=FD^{n-1} \\ & C_0=a_0E \end{aligned}, \tag{10}$$

$$(\text{II})\quad A_i=E^{i-1}FD^{i-1}+A_{i-1}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ A_0=0, \tag{11}$$

$$(\text{III})\quad X=E^{n-1}(I+C_{n-1})^{-1}*B_{n-1}+A_{n-1}. \tag{12}$$

下面证明中所指的矩阵均指（9）式中左边待变换的矩阵。

证 把矩阵中第一行块矩阵右乘（$-a_0E$）加到第n行块矩阵，消去第n行第1列块矩阵，此时第n行第二列块矩阵为$C_1=a_1E+E^2a_0=a_1E+EC_0$；第$n$行第$n+1$列块矩阵为$B_1=-a_0EF+FD^{n-1}=-C_0FD+B_0$；同理，消去第$n$行第2列块矩阵后，第$n$行第3列块矩阵和第$n$行第$n+1$列块矩阵分别为$C_2=a_2E+EC_1$；$B_2=-C_1FD^1+B_1$。如此进行下去可把（9）式中左边的矩阵变换成如下形式：

$$\begin{pmatrix} I & -E & 0 & \cdots & 0 & \vdots & F \\ 0 & I & -E & \cdots & 0 & \vdots & FD \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}+I & \vdots & B_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中C_{n-1}、B_{n-1}是由（I）推出。

同理可通过（II）把（13）式变换成

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & -E^{n-1} & \vdots & A_{n-1} \\ 0 & I & -E & \cdots & 0 & \vdots & FD \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}+I & \vdots & B_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

（14）式的矩阵第n行块矩阵左乘$E^{n-1}(C_{n-1}+I)^{-1}$加到第一行块矩阵，即可得（9）式中右边的矩阵形式，其中矩阵块X为

$$X=E^{n-1}(I+C_{n-1})^{-1}B_{n-1}+A_{n-1}.$$

上式的成立必须使矩阵$I+C_{n-1}$可逆，为此，我们在下面引入几个引理。

引理 1 （1）式解X唯一确定的充分必要条件是，D及E的特征根$\lambda_i(D)$和$\lambda_j(E)$满足下列关系（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）

$$\lambda_i(D)\cdot\lambda_j(E)\neq 1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m。 \qquad (15)$$

引理 2 设矩阵D的特征多项式为$\varphi(s)$，则下列条件等价

（i）$\lambda_i(D)\lambda_j(E)\neq 1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;$

（ii）$W(E)=\sum_{i=0}^{n} a_i E^{n-i}$为可逆矩阵。

证 假设n_0为矩阵D的零特征根的阶数；n_i为矩阵D的特征根$\lambda_i(D)$（$\lambda_i(D)\neq 0$）的阶数（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ \gamma$）. 此时由于$a_i=0$（$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n_0-1$），故（6）式中定义的特征多项式为

$$\varphi(s)=\sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

$$=s^{n_0}\sum_{i=n_0}^{n} a_i s^{i-n_0}\ (\text{由于}a_i=0,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n_0-1)$$

$$=s^{n_0}\prod_{i=1}^{\gamma}(s-\lambda_i(D))^{n_i}, \qquad (16a)$$

其中 $$\sum_{i=n_0}^{n} a_i s^{i-n}=\prod_{i=1}^{\gamma}(s-\lambda_i(D))^{n_i}。 \qquad (16b)$$

因此，由（16b）式

$$\sum_{i=n_0}^{n} a_i s^{n-i}=c\cdot\prod_{i=1}^{\gamma}(\lambda_i(D)s-1)^{n_i}\ \ (c\text{为常系数}). \qquad (17)$$

由（17）式可得$W(E)$的表示式为

$$W(E)=\sum_{i=0}^{n} a_i E^{n-i}$$

$$=\sum_{i=n_0}^{n} a_i E^{n-i}$$

$$=c\cdot\prod_{i=1}^{\gamma}(\lambda_i(D)E-I)^{n_i}\ (c\text{为常系数})。 \qquad (18)$$

由条件（i）$\Longrightarrow$（ii）

假设条件（i）成立，条件（ii）不成立，即$W(E)$为不可逆矩阵。因此由（18）式

可知，当$W(E)$不可逆时，必定有一矩阵$\lambda_i(D)E-I$为不可逆矩阵，即有一特征根

$$\lambda_j(\lambda_i(D)E-I)=\lambda_j(E)\lambda_i(D)-1=0$$

与条件（i）矛盾。

条件（ii）$\Longrightarrow$（i）

因$W(E)$可逆，由（18）式可知，对任意数i有

$$\lambda_i(D)E-I \text{ 可逆}（i=1,\ \cdots,\ n-n_0）.$$

即$\lambda_i(D)E-I$的任意特征根均不为零，故有

$$\lambda_j(\lambda_i(D)E-I)=\lambda_j(E)\lambda_i(D)-1\neq 0\ (i=1,\ 2,\cdots,n-n_0;\ j=1,\cdots,\ m). \qquad (19)$$

对$\lambda_{n-n_0+1}(D)=\lambda_{n-n_0+2}(D)=\cdots=\lambda_n(D)=0$的根

$$\lambda_j(E)\lambda_i(D)-1=0-1=-1\neq 0 \qquad (i=n-n_0+1,\ n-n_0+2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m). \qquad (20)$$

由（19）、（20）两式可推得条件（ii）$\Longrightarrow$条件（i）.

定理 2　（1）式解X唯一确定的充分必要条件是多项式矩阵$W(E)=\sum_{i=0}^{n}a_iE^{n-i}$为可逆矩阵。其中$a_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为矩阵$D$的特征多项式$\varphi(s)$的系数，$\varphi(s)$由（6）式定义。

由引理1、引理2即可推出定理2成立。

引理 3　下述等式成立

$$W(E)=I+C_{n-1},$$

其中　$W(E)$为引理2中定义的多项式矩阵，矩阵C_{n-1}是由（10）式递推求得。

由归纳法即可证得引理3成立。

由定理2、引理3可知，如果（1）式的解X存在，（$I+C_{n-1}$）的逆亦存在，即步骤（Ⅲ）是可行的。因此有

定理 3　如果（1）式的解存在，则其解可由（10）、（11）、（12）式求得。

推理 1　如果矩阵D的最小特征多项式$\varphi(s)$为

$$\varphi(s)=\sum_{i=0}^{n'}a_is^i,$$

则（1）式的解为

$$X=E^{n'-1}(I+C_{n'-1})^{-1}B_{n'-1}+A_{n'-1},$$

其中n'为矩阵D的最小特征多项式的阶，$B_{n'-1}$，$A_{n'-1}$是通过（10）、（11）式递推求得（其中把n换为n'）.

推理1显然。

三、　算法举例

设矩阵D、E、F分别为

$$D=\begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.75 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.25 & -0.75 \\ -0.25 & -0.25 \end{pmatrix},$$

求满足（1）式的矩阵X。

D的特征多项式 $\varphi(s)=s^2+s+0.25$；

由（10）、（11）式可求得

$$C_1=\begin{pmatrix} 2.25 & 0.5 & 4 \\ 2 & 2.25 & -8 \\ 4 & 2 & 7.25 \end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.1875 & 0.875 \\ 0.375 & 0.375 \end{pmatrix},$$

$$A_1=F=\begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.25 & -0.75 \\ -0.25 & -0.25 \end{pmatrix},$$

因此

$$X=E(I+C_1)^{-1}B_1+A_1$$

$$=\begin{pmatrix} -0.42462 & 0.6145 \\ -0.07626 & 0.11788 \\ 0.0408 & -0.32651 \end{pmatrix}.$$

参考文献

〔1〕（日）须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，北京，（1979），365—370.

〔2〕Karl J Åström, Introduction to Stochastic Control Theory, New York,（1970）.

〔3〕〔法〕I. D. 朗道著，吴百凡译，自适应控制，国防工业出版社，北京，（1985）.

〔4〕（美）T. 凯拉斯著，李清泉等译，线性系统，科学出版社，北京，（1985）.

The Algebraic Solution of the Linear Matrix Eqution $X=EXD+F$

Fu Mingyi

(Department of Aerospace Engineering, Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

Abstract

A new representation formula is given for the algebraic solution of the linear matrix eqution $X=EXD+F$. The representation formula can be used in numerical calculation, comparing with others, it needs less memory capacity with faster speed.