第6卷 第1期
1989年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 6, No. 1
Mar., 1989

广义系统的输出稳定化问题通过MPD反馈的可解性*

杨成梧　邹　云

（华东工学院八系，南京）

摘　要

本文讨论了广义系统的输出稳定化问题（简称GOSP）通过状态的修正比例和微分（MPD）反馈的可解性，得到了相应的充要条件和算法。

一、引　言

考察广义线性定常系统

$$\theta\begin{cases} E\dot{x}=Ax+Bu \\ z=Dx \end{cases}$$

其中，E，$A:R^n\rightarrow R^n$，$B:R^m\rightarrow R^n$，$D:R^n\rightarrow R^l$为线性变换，且E为奇异变换，E，A满足正则束条件

$$\det(sE-A)\neq 0,\ s\in C,\ C\text{为复数域} \tag{1}$$

广义系统理论自提出到现在已经十几年了，获得了大量的研究成果和应用，并且发展得越来越迅速(参见[1],[2]及其参考文献)，近年来，Zhou[1,2]等人又在时域上发展了一种颇为简洁的新方法，引入了适于广义系统的状态的修正比例和微分反馈(MPD反馈)技术，并指出对于广义系统而言，MPD反馈较之一般的状态反馈更为合理，在此基础上对广义系统的干扰解耦、极点配置、系统解耦等问题进行了详尽的讨论，并得到了较为完满的结果。

本文即利用上述基本思想（即MPD反馈技术）讨论了广义系统θ的输出稳定化问题（GOSP），即：寻求MPD反馈律　$u=\alpha Fx-F\dot{x}$，其中α为使得

$$\det(\alpha E-A)\neq 0 \tag{2}$$

的任意实数，使得闭环系统

$$\theta_0:\begin{cases}(E+BF)\dot{x}=(A+\alpha BF)x \\ z=D_x\end{cases}$$

的输出满足

---

*本文曾在第二届全国自动化年会上宣读（1988年，郑州）。

本文于1987年12月30日收到。1988年9月12日收到修改稿。

$$\lim_{t\to\infty} z(t)=0,\ \text{且}z(t)\text{不含脉冲模} \tag{3}$$

二、弱（A, B）——不变子空间及其性质

定义 1 设 $A:R^n\to R^n$，$B:R^m\to R^n$，$W\subset R^n$ 为子空间，称 $V\subset R^n$ 为关于 W 的弱（A, B）——不变子空间，系指，存在 $F:R^n\to R^m$ 使得

$$(A+BF)V\subset V\cap W \tag{4}$$

引理 1 （4）式等价于

$$AV\subset V\cap W+\mathrm{Im}B \tag{5}$$

证 （4）⇒（5）显然成立。现设（5）成立，令 $e_1,e_2\cdots,e_l$ 为 V 的一组基，则由（5）知，存在 $x_i\in V\cap W$，$y_i\in R^n$，$i=1,2,\cdots,l$，使得 $A_{e_i}=x_i+By_i$，$i=1,2,\cdots,l$，取 $e_{l+1},\cdots,e_n$ 使 $e_1,\cdots,e_n$ 为 R^n 一组基，令

$$Fei=\begin{cases}y_i & 1\leqslant i\leqslant l\\ 0 & l<i\leqslant n\end{cases}$$

则显然 $(A+BF)V\subset V\cap W$，若取 $W=\ker D$，则 $(A+BF)V\subset V\cap \ker D$. 证毕。

记使（1）成立的所有 F 为 $\mathrm{F}_*(A,B,V)$，或简记为 $\mathrm{F}(V)$，并记所有使（5）成立的子空间 V 为 $\mathrm{T}(A,B,W)$ 或简记为 $\mathrm{T}_*(W)$，且定义关于 W 的最大弱 (A,B)—不变子空间 $V_*\triangleq\sup\mathrm{T}_*(W)$，即，对于 $\forall V\in\mathrm{T}_*(W)$，有 $V\subset V_*$，不难得

引理 2 令

$$V^0=R^n \tag{6}$$

$$V^{\mu+1}=A^{-1}(\mathrm{Im}B+V^\mu\cap\ker D) \tag{7}$$

则必存在 k，使得 $V^k=V_*$。其中 $A^{-1}(\cdot)$ 表示子空间 $(\cdot)$ 在 A 下的原像。

证 显然 $V^1\subset V^0$，设 $V^\mu\subset V^{\mu-1}$，则

$$\begin{aligned}V^{\mu+1}&=A^{-1}(\mathrm{Im}B+V^\mu\cap\ker D)\\&\subset A^{-1}(\mathrm{Im}B+V^{\mu-1}\cap\ker D)=V^\mu\end{aligned} \tag{8}$$

故序列 V^μ 不增，从而必有 $k\leqslant n$，使得 $V^\mu=V^k$，$\mu\geqslant k$. 由此即知 $V^k\in\mathrm{T}_*(W)$，若 $V\in\mathrm{T}_*(W)$，则由（6）知 $V\subset V^0$，并且若 $V\subset V^{\mu-1}$，则从 $AV\subset V\cap W+\mathrm{Im}B$ 知，$V\subset A^{-1}(\mathrm{Im}B+V\cap W)\subset A^{-1}(\mathrm{Im}B+V^{\mu-1}\cap W)=V^\mu$. 故知 $V\subset V^k$，从而按定义便知 $V^k=V_*$，证毕。

注记 1 上述引理不但给出了 V_* 的存在性证明，同时也在证明中给出了 V_* 及 $F\in\mathrm{F}_*(V)$ 的具体算法。

下面我们将引入一个后面要用到的引理，它的证明属于Wonham[3]。

引理 3[3] 设 V 是任意满足 $AV\subset V$ 的子空间，记 $\overline{X}=R^n/V$，令 $P:R^n\to R^n/V$ 是标准投影，记 $\overline{A}$ 为 A 在 $\overline{X}$ 中的诱导映象，将复平面 C 作对称分割 $C=C_g\cup C_b$，满足 $C_g\cap C_b=\phi$，$C_g^*=C_g$，即任意 $\lambda\in C_g$，则 $\lambda^*\in C_g$，并设 A 的最小多项式为 $\alpha(\lambda)=\alpha_g(\lambda)\alpha_b(\lambda)$，其中 α_g（α_b）在 C 中的零点属于 C_g（C_b）。定义

$$X_g(A)=\ker\alpha_g(A),\qquad X_b(A)=\ker\alpha_b(A)$$

为简洁计，以下简称$X_g(\cdot)$为相应于划分C_g的根子空间等，相应地亦可以定义与$\overline{A}$有关的$\overline{\alpha_b}$，$\overline{X}_b(\overline{A})$等等，则

$$\overline{X}_b(\overline{A})=PX_b(A) \tag{9}$$

三、主 要 结 果

取定实数α使（2）满足，对系统θ_0作如下可逆状态变量替换$x=e^{\alpha t}y$，则θ_0化为

$$\theta_1:\begin{cases}(A-\alpha E)^{-1}(E+BF)\dot{y}=y\\ z=De^{\alpha t}y\end{cases}$$

令　$\hat{E}=(A-\alpha E)^{-1}E,\hat{B}=(A-\alpha E)^{-1}B$，且在$R^n$中取适当的基底，使

$$\operatorname{mat}(\hat{E}+\hat{B}F)=\begin{pmatrix}\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1 & \\ & \hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2\end{pmatrix} \tag{10}$$

其中，mat($\cdot$)表示线性变换在上述基下的矩阵表示，而$(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)$为$l_1\times l_1$阶非异阵，$\hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2$为指数为$q$的$l_2\times l_2$阶幂零阵，$(l_1+l_2=n)$，（证明详见附录Ⅰ），此时系统$\theta_1$可分解为

$$\theta_2:\begin{cases}\dot{y}_1=(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-1}y_1\\ (\hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2)\dot{y}=y_2\\ z=e^{\alpha t}\{D_1y_1+D_2y_2\}\end{cases}$$

该系统的输出是众所周知的，为

$$z(t)=e^{\alpha t}D_1e^{(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-1}t}y_1(0^-)+\sum_{i=1}^{q-1}D_2(\hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2)^iy_2(0^-)\delta^{(i-1)}(t)$$

其中，$\delta^{(i-1)}(t)$为单位脉冲函数$\delta(t)$的$i-1$阶导数。显然，由〔3〕及上式可知

引理 4　GOSP通过MPD反馈可解的充要条件为存在F使得

$$X_e'((\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-1})\subset N_{F1}' \tag{11}$$

$$X_0(\hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2)\subset N_{F2} \tag{12}$$

其中，　$N_{F_1}'=\bigcap_{i=0}^{l_1-1}\ker D_1(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-i}$，$N_{F_2}=\bigcap_{i=1}^{q-1}\ker D_2(\hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2)^i$，$X_e'(\cdot)$为相应于划分$C_e'=\{\lambda|\operatorname{Re}\lambda\geqslant-\alpha\}$的根子空间，而$X_0(\cdot)$为相应于划分$C_0=\{0\}$的根子空间，显然，$X_0(\hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2)=R^{l_2}$

引理 5　（11）式等价于

$$X_e(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)\subset N_{F_1} \tag{13}$$

其中，$N_{F_1}=\bigcap_{i=0}^{l_1-1}\ker D_1(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^i$，$X_e(\cdot)$ 为 相应于划 分$C_e=\{\lambda|\mathrm{Re}\lambda\geqslant-\alpha|\lambda|^2\}$的根子空间（证明见附录Ⅱ）。

引理 6 GOSP通过MPD反馈可解的充要条件为，存在F使

$$X_c(\hat{E})\subset\langle\hat{E}\mid\hat{B}\rangle+V^* \tag{14}$$

$$X_0(\hat{E}+\hat{B}F)\subset N_{2F} \tag{15}$$

其中，$V^*=\sup\mathrm{T}(\hat{E},\hat{B},\ker D)$为最大$(\hat{E},\hat{B})$——不变子空间[3]，而$N_{2F}=\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker D(\hat{E}+\hat{B}F)^i$，$X_c(\cdot)$为相应于划分$C_c=\{\lambda|\mathrm{Re}\lambda\geqslant-\alpha|\lambda|^2,\ \lambda\neq0\}$的根子空间。

证 注意到（13）等价于

$$X_c(\hat{E}+\hat{B}F)\subset N_{F_1}\oplus\bigcap_{i=0}^{q-1}\ker D_2(\hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2)^i \tag{16}$$

其中，$\oplus$为外直和，而由[1]知

$$N_{F_1}\oplus\bigcap_{i=0}^{q-1}\ker D_2(\hat{E}_2+\hat{B}_2\hat{F}_2)^i=\bigcap_{i=0}^{n-1}\ker D(\hat{E}+\hat{B}F)^i\subset\ker D$$

故得（13）等价于

$$X_c(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\bigcap_{i=0}^{n-1}\ker D(\hat{E}+\hat{B}F)^i\subset\ker D$$

而由[3]知上式即等价于

$$X_c(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V^* \tag{17}$$

另一方面（12）等价于

$$X_0(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\bigcap_{i=1}^{q-1}\ker D(\hat{E}+\hat{B}F)^i=\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker D(\hat{E}+\hat{B}F)^i$$

此即（15）式．由此及引理4和引理5即得本引理．

定理 1 （15）式等价于

$$X_0(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V_* \tag{18}$$

其中，$V_*=\sup\mathrm{T}_*(\hat{E},\hat{B},\ker D)$

证 显然，对于任意$F:R^n\to R^m$，有

$$N_{2F}\triangleq\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker D(\hat{E}+\hat{B}F)^i\in\mathrm{T}_*(\hat{E},\hat{B},\ker D)$$

因而对于所有F有

$$N_{2F}\subset V_* \tag{19}$$

由于对所有F有$\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle=\langle\hat{E}+\hat{B}F|\hat{B}\rangle$,并且$\hat{E}V_*\subset V_*\cap\ker D+\mathrm{Im}\ \hat{B}$,故若记$\Phi=\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V_*$,则$(\hat{E}+\hat{B}F)\Phi\subset\Phi$对所有$F$成立。所以每个$F$,图1都是可交换的,在图1中,竖直

$$\begin{tikzcd}
R^n \arrow[r, "\hat{E}+\hat{B}F"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "Q"'] & R^n \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "Q"] \\
R^n/N_{2F} \arrow[r, "\overline{\hat{E}+\hat{B}F}"] \arrow[d] & R^n/N_{2F} \arrow[d] \\
R^n/\varphi \arrow[r, "\overline{\overline{\hat{E}+\hat{B}F}}"] & R^n/\varphi
\end{tikzcd}$$

图 1　映射的可交换图

箭头表示标准投影,加一横表示诱导映象,而

$$Q:\ R\rightarrow R^n/\Phi$$

为标准投影,映象$\overline{\overline{\hat{E}+\hat{B}F}}$由关系式$\overline{\overline{\hat{E}+\hat{B}F}}Q=Q(\hat{E}+\hat{B}F)=Q\hat{E}$(注意到$\mathrm{Im}\hat{B}F\subset\Phi$)唯一确定。因为$\overline{\overline{\hat{E}}}Q=Q\hat{E}$故对所有$F$我们总有$\overline{\overline{\hat{E}+\hat{B}F}}=\overline{\overline{\hat{E}}}$。

现在设(15)对某个F成立,则由引理3知

$$Q\mathrm{X}_0(\hat{E})=\overline{\overline{\mathrm{X}}}_0(\overline{\overline{\hat{E}}})=\overline{\overline{\mathrm{X}}}_0(\overline{\overline{\hat{E}+\hat{B}F}})=Q\mathrm{X}_0(\hat{E}+\hat{B}F)\subset QN_{2F}=0$$

所以　$\mathrm{X}_0(\hat{E})\subset\ker Q=\Phi$,此即我们所要求的。

反之,若(18)成立,即$\mathrm{X}_0(\hat{E})\subset\Phi$,任取$F_0\in\mathrm{F}_*(V_*)$,使得$(\hat{E}+\hat{B}F_0)V_*\subset V_*\cap\ker D$,然后在图1中以$F_0$代替$F$,则同理,由引理3得

$$Q\mathrm{X}_0(\hat{E}+\hat{B}F_0)=\overline{\overline{\mathrm{X}}}_0(\overline{\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0}})=\overline{\overline{\mathrm{X}}}_0(\overline{\overline{\hat{E}}})=Q\mathrm{X}_0(\hat{E})\subset Q\Phi=0$$

因此,$\mathrm{X}_0(\hat{E}+\hat{B}F_0)\subset\ker Q=\Phi$,设$P:R^n\rightarrow R^n/V_*$为标准投影,又注意到$V_*=\bigcap_{i=1}^{n-1}(\hat{E}-\hat{B}F_0)^{-i}\ker D=N_{2F_0}$,故有

$$\overline{\mathrm{X}}_0(\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0})=P\mathrm{X}_0(\hat{E}+\hat{B}F_0)\subset P\Phi=P\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle$$

$$=P\langle\hat{E}+\hat{B}F_0|\hat{B}\rangle=\langle\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0}|\overline{\hat{B}}\rangle \tag{20}$$

其中,$\overline{\hat{B}}=P\hat{B}$,显然由(20)即知[3]存在$\overline{F}_1:R^n/V_*\rightarrow R^m$使

$$\sigma(\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0}+\overline{\hat{B}}\,\overline{F}_1)\subset C_g\triangleq\{\lambda|\mathrm{Re}\lambda<-\alpha|\lambda|^2\} \tag{21}$$

或等价地$\overline{\mathrm{X}}_0(\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0}+\overline{\hat{B}}\overline{F_1})=0$,事实上,若有$\bar{x}\in R^n/V_*$使得$\bar{x}\neq0$,且$\bar{x}\in$

$\overline{X}_0 \ (\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0+\hat{B}\overline{F}_1})$，则$\overline{\alpha_0}(\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0+\hat{B}\overline{F}_1})x=0$，故有$0\in C_g$，矛盾。故（21）成立。令$F_1=\overline{F}_1P$，且$F=F_0+F_1$，则

$$(\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0+\hat{B}\overline{F}_1})P=P(\hat{E}+\hat{B}F) \tag{22}$$

因而由诱导映象的唯一性知，

$$\overline{\hat{E}+\hat{B}F_0+\hat{B}\overline{F}_1}=\overline{\hat{E}+\hat{B}F} \tag{23}$$

故由（21）—（23）和引理3便有，$PX_0(\hat{E}+\hat{B}F)=\overline{X}_0(\overline{\hat{E}+\hat{B}F})=0$，于是$X_0(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\ker P=V_*$，从而$X_0(\hat{E}+\hat{B}F)\subset N_{2F}$，此即（15）式，至此定理得证。

注记 2　上述定理的证明过程与[3]中定理4.4的证明十分类似，事实上证明思想是一样，此外上述证明实质上是构造性的。综合引理6和定理1即可得

定理 2　GOSP通过MPD反馈可解的充要条件为（14）式和（18）式成立，即

$$X_c(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V_*$$

$$X_0(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V^*$$

其中，$V^*=\sup T(\hat{E},\hat{B},\ker D)$和$V_*=\sup T_*(\hat{E},\hat{B},\ker D)$关于使得（2）成立$\alpha$除去有限个外均不变，同时$X_c(\hat{E})$，$X_0(\hat{E})$及$\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle$均与使得（2）成立的具体$\alpha$无关。

证　只须证明定理中各量与使得（2）成立的α的各种关系成立即可，而这由[1]和逆矩阵及幂零阵性质极易证明，参见附录Ⅲ。

推 论　GOSP通过MPD反馈可解的充分条件为$X_d(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V^*$，这里，$X_d=X_c\oplus X_0$

证　注意到$V^*\subset V_*$即得本推论。

注记 3　注意到对所有$F:R^n\to R^m$　有

$$\langle\hat{E}+\hat{B}F|\hat{B}\rangle=\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle \tag{24}$$

且，$V_F^*=V^*$，其中，$V_F^*=\sup T(\hat{E}+\hat{B}F,\hat{B},\ker D)$，$V^*=\sup T(\hat{E},\hat{B},\ker D)$，而

$$X_c(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V^* \tag{25}$$

的充要条件为[3]，存在$F:R^n\to R^m$使得$X_c(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\ker D$，同时对任意$F_1:R^n\to R^m$，使

$$X_c(\hat{E}+\hat{B}F_1)\subset\langle\hat{E}+\hat{B}F_1|\hat{B}\rangle+V_{F_1}^* \tag{26}$$

成立的充要条件为，存在$F_2:R^n\to R^m$使得$X_c(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\ker D$，其中$F_1=F_1+F_2$，故由上式及（24）—（26）便知（25）式等价于

$$X_c(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V^* \tag{27}$$

其中，$F:R^n\to R^m$为任意线性映射。由此及定理2便得如下算法。

算法　取定实数α使（2）成立，然后

1）按引理2构造V_*，验证条件（18），若成立则按定理1构造F_1，若不满足，则问题无解。

2）按〔3〕中算法，构造V^*，并验证条件（27），若成立，即确有$X_c(\hat{E}+\hat{B}F_1)\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+V^*$，则按〔3〕中有关算法构造$F_2$，使得，$X_c(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\ker D$，其中，$F=F_1+F_2$，若（27）不成立，则问题无解。

3）令$u=F(\alpha x-\dot{x})$，此即为所求。

注记 4　上述算法2)中的F_2若按〔3〕中有关算法（可参见〔3〕109—112页）计算，则显然它并不影响$X_0(\hat{E}+\hat{B}F_1)$的结构，从而由定理2易知3)中所求反馈律即恰为所求。关于满足推论条件的问题的反馈F的算法同〔3〕。

四、结　论

本文讨论了GOSP通过MPD反馈的可解性并得到了有关的充要条件和相应的算法。文〔4〕曾讨论了脉冲能控的广义系统的GOSP通过一般状态反馈的可解性问题，在那里作者给出了一种所谓FASF的算法并得出了FASF算法可行的充要条件，如何寻求利用一般状态反馈解决GOSP的一般方法有待于进一步研究。

附　录　Ⅰ

（10）式的证明：取R^n中适当基底总可使得$\hat{E}+\hat{B}F$化为 Jordan 形diag（J_1，J_2），其中J_1可逆，而J_2为幂零阵。设基底的变换阵为X，则

$$\mathrm{diag}(J_1,J_2)=X^{-1}(\hat{E}+\hat{B}F)X=X^{-1}EX+X^{-1}\hat{B}FX,\ \text{令}$$

$$X^{-1}\hat{B}=\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\ \hat{B}_2\end{bmatrix},\ FX=(\hat{F}_1,\hat{F}_2),\ X^{-1}\hat{E}X=\begin{bmatrix}\hat{E}_1 & \hat{E}_3\\ \hat{E}_4 & \hat{E}_2\end{bmatrix}$$

其中，$\hat{B}_i\hat{F}_i$与J_i，$i=1,2$. 同维，则显然可知（10）式成立，且$\hat{F}_1$，$\hat{F}_2$互为独立。

附　录　Ⅱ

引理5的证明：设$x\in X_c(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)$，若$x=0$，则显然$x\in X'_e((\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-1})$，故设$x\neq0$，则有$x_i\neq0,\lambda_i\neq0$且$\mathrm{Re}\lambda_i\geqslant-\alpha|\lambda_i|^2,1\leqslant i\leqslant n$使$x=\sum_{i=1}^{n}x_i$且$((\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)-\lambda_iI)^{r_i}x_i=0,1\leqslant i\leqslant n$，对某正整数$r_i$成立。而此即$((\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-1}-\lambda^{-1}I)^{r_i}x_i=0$，且$\mathrm{Re}\lambda_i^{-1}\geqslant-\alpha$. 由此即知，$x\in X'_e((\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-1})$，从而$x\in X'_e((\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-1})$，同理可证相反的包含关系，故有

$$X'_e((\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-1})=X_c(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F})\tag{F1}$$

又设，$x\in\bigcap_{i=0}^{l_1-1}\ker D_1(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^i$，则$D_1(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^ix=0$，$i=0,1\cdots,l_1-1$，故$D_1(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)^{-i}x=D_1f(\hat{E}_1+\hat{B}_1\hat{F}_1)x=0$，其中$f(\cdot)$为某个次数不大于$l_1-1$的多项式。于是

知$N_{F_1} \subset N'_{F_1}$．同理可证相反包含关系，故$N_{F_1} = N'_{F_2}$，综合上式及$(F1)$由引理4即得本引理．

附 录 Ⅲ

定理2的证明：首先由〔1〕知V^*关于使得（2）成立的α除去有限个外均不变，且$\langle \hat{E} \mid \hat{B} \rangle$与使(2)成立的具体$\alpha$无关．注意到$V_*$的定义，我们不难知必有 L，$M:R^n \to R^n$，$N:R^n \to R^m$，使得$EL = (-\alpha E + A)LM + BN$，若$\det(\beta E - A) \neq 0$，且$(\alpha-\beta)^{-1}$不是$M$的特征值，则此式等价于[1] $EL = (-\beta E + A)LM(I-(\alpha-\beta)M)^{-1} + BN(I-(\alpha-\beta)M)^{-1}$，此即$(-\beta E + A)^{-1}EV_* \subset V_* \cap \mathrm{Ker}D + \mathrm{Im}B$，故知$V_*$与除去至多有限个使（2）成立的$\alpha$后均与其余的使（2）成立的$\alpha$无关．

另一方面，注意到若$(\beta E - A)^{-1}$存在 则

$$(-\alpha E + A)^{-1}E = (-\alpha(-\beta E + A)^{-1}E + (-\beta E + A)^{-1}A)^{-1}(-\beta E + A)^{-1}E \qquad (F2)$$

令 $\hat{E}_\alpha = (-\alpha E + A)^{-1}E, \hat{E}_\beta = (-\beta E + A)^{-1}E, \hat{A}_\beta = (-\beta E + A)^{-1}A$，则由$-\beta \hat{E}_\beta + \hat{A}_\beta = I$ 知$\hat{E}_\beta \hat{A}_\beta = \hat{A}_\beta \hat{E}_\beta$，故由(25)易证$\mathrm{index}\,\hat{E}_\alpha = \mathrm{index}\,\hat{E}_\beta \triangleq q$，$\mathrm{rank}\ \hat{E}_\alpha^q = \mathrm{rank}\ \hat{E}_\beta^q$，其中index(·)指线性映射的指数[5]．由此即知，$X_0(\hat{E}_\alpha) = X_0(\hat{E}_\beta)$，又若$\lambda \in \sigma(\hat{E}/\{0\})$，则对于$\forall\ k \geqslant 1$有$\ker(\lambda I - \hat{E}_2)^k = \ker(-\alpha E + A)^{-k}(-(\lambda\alpha+1)E + \lambda A)^k = \ker\left(\dfrac{\alpha\lambda+1}{\lambda}E - A\right)^k$，又由于 $n > \mathrm{rank}(\lambda I - E_\alpha) = \mathrm{rank}\left(\dfrac{\lambda\alpha+1}{\lambda}E - A\right)$，从而$\mu = (\lambda\alpha+1)/\lambda \in \sigma(E, A)$与$\alpha$无关．所以对于任意的$k \geqslant 0$，$\ker(\lambda I - \hat{E}_\alpha)^k$与使（2）满足的具体$\alpha$无关，注意到$\mathrm{Re}\lambda \geqslant -\alpha|\lambda|^2$显然等价于$\mathrm{Re}\mu \geqslant 0$，故$X_c(\hat{E}_\alpha)$与使（2）成立的具体$\alpha$无关． 证毕．

参 考 文 献

〔1〕 Zheng Zhou, Mark A. Shayman, and Tzyh-Jong Tarn, Singular Systems: A New Approach in the Time Domain, IEEE Trans. Automa. Contr., 32: 1,(1987), 42—50.

〔2〕 Mark A. Shayman, and Zheng Zhou, Feedback Control and Classification of Generlized Linear Systems, IEEE Trans. Automa. Contr., 32:6,(1987), 483—494.

〔3〕 W. M. 旺纳姆，线性多变量控制，一种几何方法，姚景依译，科学出版社，北京，(1984).

〔4〕 杨成梧，邹云，脉冲能控的广义系统的输出稳定化，将发表于《控制与决策》.

〔5〕 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，北京，(1984).

On the Sovability of GSOP Via MPD Feedback

Yang Chengwu, Zou Yun

(Ballistic Research Laboratory of China, East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract

In this paper, the output stabilization problem of generalized system (GOSP) has been studied via modified proportional and derivative (MPD) feedback of the state in the form of $u = F(\alpha x - \dot{x})$, and a sufficient and necessary condition for the solvability of GOSP is obtained.