第6卷 第2期 控制理论与应用 Vol.6, No.2
1989年6月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS June, 1989

一种新的时变双线性离散系统的分析及参数估计方法

冯恩波 俞金寿 蒋慰孙

（华东化工学院自动化研究所，上海）

摘　　要

本文首先讨论了离散正交脉冲函数及其性质，利用增广离散正交脉冲函数矩阵的换位公式和乘法公式，提出了一种新的时变双线性离散系统的分析和参数估计方法．这种方法，可将差分方程化为代数方程，从而使计算得到简化．实例说明了这种方法的有效性．

一、引　　言

正交函数在系统分析和设计中已有了广泛的应用，它的良好的展开特性，使得最优控制和系统辨识中的许多问题变得较易求解．在连续正交函数方面，Chen 和 Hisao 等已经做了许多工作[1]；离散正交函数方面，以沃尔什、块脉冲函数为典型，也得到了广泛应用[2][5][6]．1987年，I. R. Horng 和 S. J. Ho[3][4]又首次定义了离散脉冲正交函数（DPOF），并提出了基于这种函数的系统分析方法，他们给出了定常和时变离散线性系统的参数估计公式和二次型指标最优控制的轨线．文献[7]继上述工作之后，首次定义了增广 DPOF 矩阵，并证明了相应的换位公式和乘法公式，从而将 DPOF 分析方法推广到了双线性定常系统．本文将进一步利用 DPOF 换位公式乘法公式，研究时变双线性系统的分析和和最小二乘参数估计问题．

二、离散脉冲正交函数及其性质

集合$\{\phi_i(k)\}(i=0,1,2,\cdots,N-1)$称为离散脉冲正交函数（DPOF），其中

$$\phi_i(k)=\begin{cases}1; & k=i\\ 0; & 其它\end{cases}\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.1}$$

显然它具有正交特性：

$$\sum_{k=0}^{N-1}\phi_i(k)\phi_j(k)=\delta_{ij},\quad i,j=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.2}$$

设离散函数 $f(k)$ 有界，则可用 DPOF 展开为

本文于1988年4月11日收到。1988年12月30日收到修改稿。

$$f(k)=\sum_{i=0}^{N-1} f_i\phi_i(k) \hat{=} f^T\phi(k) \tag{2.3}$$

式中，$f^T=[f_0\ f_1\cdots f_{N-1}]$称为 DPOF 系数向量。

$\Phi(k)=[\phi_0(k)\phi_1(k)\cdots\phi_{N-1}(k)]^T$称为 DPOF 向量系数，$f^T$ 使得下列目标函数最小：

$$\varepsilon=\sum_{k=0}^{N-1}\left[f(k)-\sum_{i=0}^{N-1} f_i\phi_i(k)\right]^2$$

其中，

$$f_i=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\phi_i(k);\quad i=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.4}$$

式（2.3）和（2.4）构成了一个变换对。

由定义（2.1）显然有

$$\left.\begin{array}{l}\phi_i(k-j)=\phi_{i+j}(k)\\ \phi_i(k+j)=\phi_{i-j}(k)\end{array}\right\} i,j=0,1,2,\cdots \tag{2.5}$$

我们规定 $\phi_i(k)=0$，如果 $0>i$，$k>N-1$。

关于 $\Phi(k)$，有以下的性质：

定理 1 （位移变换）[3] 设 $\Phi(k)$为 DPOF 向量，则

$$\Phi(k+j)=T^j\Phi(k);\quad j=0,1,2,\cdots \tag{2.6a}$$

$$\Phi(k-j)=(T^j)^T\Phi(k);\quad j=0,1,2,\cdots \tag{2.6b}$$

式中，T 称为位移变换矩阵：

$$T=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & & 0\\ 1 & 0 & & & \vdots\\ 0 & 1 & & & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}0 & 0\\ \hdashline I_{N-1} & 0\end{array}\right]_{N\times N}$$

定义 设 $\Phi(k)(k=0,1,\cdots,N-1)$是 DPOF 向量，称

$$\hat{\Phi}_m(k)=[\phi_0 I_m \vdots \phi_1 I_m \vdots \cdots \vdots \phi_{N-1}I_m]^T=[\Phi(k)\otimes I_m]_{mN\times m} \tag{2.7}$$

为 m 阶增广 DPOF 矩阵。符号$\otimes$表示 Kronecker 积，I_m 是 m 阶单位阵。

定理 2 （换位公式）[7] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则

$$A\hat{\Phi}_n^T(k)=\hat{\Phi}_m^T(k)(I_N\otimes A) \tag{2.8}$$

式中，$\hat{\Phi}_n^T$、$\hat{\Phi}_m^T$ 分别是 n、m 阶增广 DPOF 矩阵的转置。

定理 3 （乘法公式）[7] 设 $\hat{\Phi}_m(k)$、$\hat{\Phi}_{mN}(k)(k=0,1,\cdots,N-1)$分别为 m、mN阶增广 DPOF 矩阵，则

$$\hat{\Phi}_m^T(k)\hat{\Phi}_{mN}^T(k)=\hat{\Phi}_m^T(k)(E_N\otimes I_m) \tag{2.9}$$

式中，$E_N \in R^{N\times N^2}$是由 $e_i = [0\cdots0\ \underset{i}{1}\ 0\cdots0]_{1\times N}$ 形成的对角块矩阵

$$E_N = \mathrm{diag}[e_1\ \ e_2\cdots e_N]$$

以上的结论，是研究双线性系统的基本公式。

三、DPOF在双线性时变系统分析中的应用

设离散双线性时变系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + \sum\limits_{d=1}^{r} N_d(k)x(k)u_d(k) + B(k)u(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

式中，$x(k)\in R^n, u(k)\in R^r, A(k)\in R^{n\times n}, N_d(k)\in R^{n\times n}, u_d\in R(d=1,2,\cdots,r), B(k)\in R^{n\times r}$.

首先，将时变矩阵 $A(k)$，$N_d(k)$，$B(k)$展开成 DPOF 式有

$$A(k) = \sum_{i=1}^{N-1} A(i)\phi_i(k) = [I_n\phi_0(k) \vdots I_n\phi_1(k) \vdots \cdots \vdots I_n\phi_{N-1}(k)]\begin{bmatrix} A(0) \\ A(1) \\ \vdots \\ A(N-1)\end{bmatrix}$$

$$= \hat{\Phi}_n^T(k)\overline{A} \qquad (k=0,1,\cdots,N-1) \tag{3.2}$$

式中，$\overline{A} = [A^T(0) \vdots A^T(1) \vdots \cdots \vdots A^T(N-1)]^T_{nN\times n}$

同理可得

$$N_d(k) = \hat{\Phi}_n^T(k)\overline{N_d} \qquad (d=1,2,\cdots,r;\ k=0,1,\cdots,N-1) \tag{3.3}$$

$$B(k) = \hat{\Phi}_n^T\ \overline{B} \qquad (k=0,1,\cdots,N-1) \tag{3.4}$$

式中，$\overline{N_d} = [N_d^T(0) \vdots N_d^T(1) \vdots \cdots \vdots N_d^T(N-1)]^T_{nN\times n}$

$\overline{B} = [B^T(0) \vdots B^T(1) \vdots \cdots \vdots B^T(N-1)]^T_{nN}$.

假定 $x(k+1)$可展开为

$$x(k+1) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i\phi_i(k) = [\Phi(k)\otimes I_n]^T G = \hat{\Phi}_n^T(k)G \tag{3.5}$$

$G = [g_0^T \vdots g_1^T \vdots \cdots \vdots g_{N-1}^T]^T_{nN\times 1}$ 是待求的系统响应 DPOF 系数。利用定理1的结论，可得

$$x(k) = \hat{\Phi}_n^T(k-1)G = [T^T\Phi(k)\otimes I_n]^T G = \hat{\Phi}_n^T(k)\hat{T}G \tag{3.6}$$

$$k=1,2,\cdots,N-1$$

此处，$\hat{T} = [T^T\otimes I_n]^T = [T\otimes I_n]_{nN\times nN}$.

同理又有

$$u(k)=\hat{\Phi}_r^T(k)H \qquad (k=0,1,\cdots,N-1) \tag{3.7}$$

式中，$H=[h_0^T \vdots h_1^T \vdots \cdots \vdots h_{N-1}^T]_{rN\times 1}^T$.

若定义向量

$$V_1=[(A(0)x_0)^T \vdots 0^T \vdots \cdots \vdots 0^T]^T$$

当 $k=0$ 时，有

$$A(k)x(k)=\hat{\Phi}_n^T(k)V_1;\ k=0 \tag{3.8}$$

现在研究双线性项，首先将 $u_d(k)$ 展开，得：

$$u_d(k)=\sum_{i=1}^{N-1}P_{d,i}\phi_i(k)=\hat{\Phi}_1^T(k)P_d \tag{3.9}$$

式中，$P_d=[P_{d,1},\cdots,P_{d,N-1}]_{N\times 1}^T$是 DPOF 展开系数向量. 定义向量

$$V_2^{(d)}=[(N_d(0)x_0)^T \vdots 0^T \vdots \cdots \vdots 0^T]^T$$

即得

$$N_d(k)x(k)=\hat{\Phi}_n^T(k)\ V_2^{(d)};\ k=0 \tag{3.10}$$

将式(3.4)、(3.5)、(3.7)、(3.8)和式(3.10)代入式(3.1)中，利用定理2和定理3，可以推导得

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_n(k)G&=\hat{\Phi}_n^T(k)V_1+\sum_{d=1}^{r}\hat{\Phi}_n^T(k)V_2^{(d)}\hat{\Phi}_1^T(k)P_b+\hat{\Phi}_n^T(k)\overline{B}\,\hat{\Phi}_r^T(k)H\\&=\hat{\Phi}_n^T(k)\left[V_1+\sum_{d=1}^{r}(E_N\otimes I_n)(I_n\otimes V_2^{(d)})P_d\right]+\hat{\Phi}_n^T\ \hat{B}H\end{aligned} \tag{3.11}$$

式中，$\hat{B}=(E_N\otimes I_n)(I_n\otimes\overline{B})$，若令$\hat{\Phi}_n^T(k)$的 DPOF 系数向量相等，得，

$$G=\hat{V}_1+\hat{B}H;\ k=0 \tag{3.12}$$

其中，

$$\hat{V}_1=V_1+\sum_{d=1}^{r}(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes V_2^{(d)})P_d \tag{3.13}$$

现在研究 $k=1,2,\cdots,N-1$时的情况：

将式(3.3)、(3.6)和式(3.9)代入到式(3.1)中的双线性项中，并利用换位公式和乘法公式，可得：

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{r}N_d(k)x(k)u_d(k)&=\sum_{d=1}^{r}\hat{\Phi}_n^T(k)\overline{N}_d\hat{\Phi}_n^T(k)\hat{T}G\hat{\Phi}_1^T(k)P_d\\&=\sum_{d=1}^{r}\hat{\Phi}_n^T(k)(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes\overline{N}_d)(E_N\otimes I_n)(I_n\otimes\hat{T}G)P_d\end{aligned} \tag{3.14}$$

将式(3.2)，式(3.4)—(3.7)代入式(3.1)中，得

$$\hat{\Phi}_n^T(k)G=\hat{\Phi}_n^T(k)\overline{A}\ \hat{\Phi}_n^T(k)\hat{T}G$$

$$+\sum_{d=1}^{r}\hat{\Phi}_n^T(k)(E_N\otimes I_n)(I_n\otimes\overline{N_d})(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes\hat{T}G)P_d+\hat{\Phi}_n^T(k)\overline{B}\ \hat{\phi}_r^T(k)H$$

(3.15)

利用换位公式和乘法公式，上式可写成

$$\hat{\Phi}_n^T(k)G=\hat{\Phi}_n^T(k)\ \hat{\Phi}_{nN}^T(k)(I_n\otimes\overline{A})\hat{T}G$$

$$+\sum_{d=1}^{r}\hat{\Phi}_n^T(k)(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes\overline{N_d})(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes\hat{T}G)P_d$$

$$+\hat{\Phi}_n^T(k)\ \hat{\Phi}_{nN}^T(k)(I_N\otimes\overline{B})H \quad (3.16)$$

即 $\hat{\Phi}_n^T(k)G=\hat{\Phi}_n^T(k)(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes\overline{A})\hat{T}G$

$$+\sum_{d=1}^{r}\hat{\Phi}_n^T(k)(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes\overline{N_d})(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes\hat{T}G)P_d+\hat{\Phi}_n^T(k)(E_N\otimes I_n)(I_N\otimes\overline{B})H$$

(3.17)

令DPOF系数向量相等，由上式可得

$$[I_{nN}-\hat{A}\hat{T}]G=\sum_{d=1}^{r}\hat{N}_d\hat{E}_N(I_N\otimes\hat{T}G)P_d+\hat{B}H \quad (3.18)$$

式中， $\hat{A}=\hat{E}_N(I_N\otimes\overline{A})$， $\hat{N}_d=\hat{E}_N(I_N\otimes\overline{N_d})$， $\hat{E}_N=(E_N\otimes I_n)$

注意到：

$$[I_N\otimes\hat{T}G]P_d=(I_N\otimes\hat{T})(I_N\otimes G)P_d=(I_N\otimes\hat{T})(P_d\otimes I_{nN})G$$

所以，式(3.18)可变为

$$LG=\hat{B}H \qquad (k=1,2,\cdots,N-1) \quad (3.19)$$

其中， $L=(I_{nN}-\hat{A}\hat{T})-\sum_{d=1}^{r}\hat{N}_d\hat{E}_N(I_N\otimes\hat{T})(P_d\otimes I_{nN})$

将式(3.12)及式(3.19)写在一起，即得到 (3.12)

$$\begin{cases}G=\hat{V}_1+\hat{B}H; & k=0\\ LG=\hat{B}H; & k=1,2,\cdots,N-1\end{cases} \quad (3.19)$$

因为T的第一行均为零元，故以上两式可以合并为

$$G=L^{-1}[\hat{V}_1+\hat{B}H]; \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \quad (3.20)$$

从而，我们将(3.1)式表示的双线性系统化成了(3.20)式表示的代数方程，利用此式，可直接求取系统的时间响应。

四、DPOF在双线性时变离散系统参数估计中的应用

现在，研究式（3.1）的参数估计问题。其中时变矩阵 $A(k)$；$N_d(k)$，$(d=1,2,\cdots,r)$；$B(k)$为待估参数矩阵。

将式（3.1）按DPOF展开，则得

$$x(k+1)=[g_0\cdots g_{N-1}]\Phi(k)=G^T\Phi(k) \qquad (4.1)$$

$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

$$x(k)=[x_0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0]\Phi(k)=V_3^T\Phi(k);\qquad k=0 \qquad (4.2)$$

式中，$V_3^T=[x_0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0]$

$$x(k)=G^T\Phi(k-1)=G^TT^T\Phi(k);\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1 \qquad (4.3)$$

$$u(k)=[h_0\cdots h_{N-1}]\Phi(k)=H^T\Phi(k);\qquad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1 \qquad (4.4a)$$

$$u_d(k)=[P_{d,0},\cdots,P_{d,N-1}]\Phi(k)=P_d^T\Phi(k)$$

$$d=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1 \qquad (4.4b)$$

对于时变系数矩阵，又有展开式

$$A(k)=\sum_{i=0}^{N-1}A(i)\phi_i(k)=[A(0)\ \ A(1)\cdots A(N-1)]\begin{pmatrix} I_n\phi_0(k)\\ I_n\phi_1(k)\\ \vdots\\ I_n\phi_{N-1}(k)\end{pmatrix}=\overline{A}^T\hat{\Phi}_n(k) \qquad (4.5)$$

$$N_d(k)=\sum_{i=0}^{N-1}N_d(k)\phi_i(k)=[N_d(0)\ \ N_d(1)\cdots N_d(k)]\begin{pmatrix} I_n\phi_0(k)\\ I_n\phi_1(k)\\ \vdots\\ I_n\phi_{N-1}(k)\end{pmatrix}=\overline{N}_d^T\hat{\Phi}_n(k) \qquad (4.6)$$

$$B(k)=\sum_{i=0}^{N-1}B(k)\phi_i(k)=[B(0)\ \ B(1)\cdots B(N-1)]\begin{pmatrix} I_n\phi_0(k)\\ I_n\phi_1(k)\\ \vdots\\ I_n\phi_{N-1}(k)\end{pmatrix}=\overline{B}^T\hat{\Phi}_n(k) \qquad (4.7)$$

当 $k=0$ 时，将式（4.1）—（4.7）代入到式（3.1）中，得

$$G^T\Phi(k)=\overline{A}^T\hat{\Phi}_n(k)V_3^T\Phi(k)+\sum_{d=1}^{r}\overline{N}_d^T\hat{\Phi}_n(k)V_3^T\Phi(k)P_d^T\Phi(k)+\overline{B}^T\hat{\Phi}_n(k)H^T\Phi(k) \qquad (4.8)$$

注意到 $\phi(k)$的正交性，以下两式成立：

$$(\text{i})\quad \Phi(k)P_d^T\Phi(k)=\mathrm{diag}[P_{d,0}\ \ P_{d,1}\cdots P_{d,N-1}]\Phi(k)\hat{=}D_d\,\Phi(k) \qquad (4.9)$$

$$(\text{ii})\quad \hat{\Phi}_n(k)W\Phi(k)=\mathrm{diag}[W_1\ \ W_2\ \ \cdots\ \ W_N]\Phi(k) \qquad (4.10)$$

此处 $W=[W_1 \vdots W_2 \vdots \cdots \vdots W_N]_{n\times N}$

因此式(4.8)可化成

$$G^T\Phi(k)=\overline{A}^T\mathrm{diag}[x_0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0]\Phi(k)+\sum_{d=1}^{r}\overline{N}_d^T\mathrm{diag}[x_0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0]\cdot D_d\Phi(k)$$

$$+\overline{B}^T\mathrm{diag}[h_0\ h_1\cdots h_{N-1}]\Phi(k) \tag{4.11}$$

令上式的 DPOF 系数相等，则得

$$G^T=\overline{A}^T\mathrm{diag}[x_0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0]+\sum_{d=1}^{r}\overline{N}_d^T\mathrm{diag}[x_0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0]D_d$$

$$+\overline{B}^T\mathrm{diag}[h_0\ h_1\cdots h_{N-1}]\quad (k=0) \tag{4.12}$$

当 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ 时，同理可写出

$$G^T\Phi(k)=\overline{A}^T\hat{\Phi}_n(k)G^TT^T\Phi(k)+\sum_{d=1}^{r}\overline{N}_d^T\hat{\Phi}_n(k)G^TT^T\Phi(k)P_d^T\Phi(k)$$

$$+\overline{B}^T\hat{\Phi}_n(k)H^T\Phi(k) \tag{4.13}$$

令 $G^TT^T=[W_1\ W_2\cdots W_N]\hat{=}W$，利用式(4.9)和式(4.10)，式(4.13)可写为

$$G^T=\overline{A}^T\mathrm{diag}[W_1\ W_2\cdots W_N]+\sum_{d=1}^{r}\overline{N}_d^T\mathrm{diag}[W_1\ W_2\cdots W_N]\cdot D_d$$

$$+\overline{B}^T\mathrm{diag}[h_0\ h_1\cdots h_{N-1}]\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1) \tag{4.14}$$

因为位移变换阵 T 的第一行均为零元素，即 $W_1\equiv 0$，故式(4.12)和式(4.14)可合并写为

$$G=(\mathrm{diag}[x_0 \vdots W_2 \vdots \cdots \vdots W_N])^T\overline{A}+\sum_{d=1}^{r}D_d(\mathrm{diag}[x_0 \vdots W_2 \vdots \cdots \vdots W_N])^T\overline{N}_d$$

$$+(\mathrm{diag}[h_0\ h_1\cdots h_{N-1}])^T\overline{B} \tag{4.16}$$

若令
$$\Omega=[(\mathrm{diag}[x_0\ W_2\cdots W_N])^T \vdots D_1(\mathrm{diag}[x_0\ W_2\cdots W_N])^T \vdots \cdots \vdots$$
$$\vdots D_r(\mathrm{diag}[x_0\ W_2\cdots W_N])^T \vdots (\mathrm{diag}[h_0\ h_1\cdots h_{N-1}])^T]$$

$$Z^T=[\overline{A} \vdots \overline{N}_1 \vdots \cdots \vdots \overline{N}_r \vdots \overline{B}]$$

则式(4.16)可写为

$$G=\Omega Z$$

在上式中，待估参数共有 $nN(n+nr+r)$ 个，但只有 nN 个方程，所以至少需要使用 $n+nr+r$ 个输入信号，参数短阵的最小二乘估计为

$$\hat{Z}=(\overline{\Omega}^T\overline{\Omega})^{-1}\overline{\Omega}^T\overline{G} \tag{4.17}$$

其中，
$$\overline{\Omega}=\begin{pmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \vdots\\ \Omega_{n+nr+r}\\ \vdots\end{pmatrix},\qquad \overline{G}=\begin{pmatrix}G_1\\ G_2\\ \vdots\\ G_{n+nr+r}\\ \vdots\end{pmatrix}$$

这里的{ Ω_i，G_i }是由第 i 组输入信号产生的。

利用（4.17）式，我们可以方便地对双线性系统（3.1）的参数进行估计。

五、应 用 实 例

我们以一阶系统为例，用公式（3.20）求出系统响应表达式并用式（4.17）对系统参数进行估计。

例 1　对于双线性系统

$$\begin{cases} x(k+1)=a(k)x(k)+d(k)x(k)u(k)+b(k)u(k) \\ x(0)=x_0 \\ k=0,\ 1,\ \cdots \end{cases}$$

令 $\overline{A}=\begin{bmatrix} a(0) \\ a(1) \end{bmatrix}$，$\overline{N}_1=\begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \end{bmatrix}$，$\overline{B}=\begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \end{bmatrix}$，$H=\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix}$

由前面证得的结果，可以求得

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} a(0) & 0 \\ 0 & a(1) \end{bmatrix},\quad \hat{N}_1=\begin{bmatrix} d(0) & 0 \\ 0 & d(1) \end{bmatrix},\quad \hat{B}=\begin{bmatrix} b(0) & 0 \\ 0 & b(1) \end{bmatrix}$$

根据式（3.19），得

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a(1)-d(1)u(1) & 1 \end{bmatrix}$$

显然，矩阵 L 是非奇异的，故

$$L^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a(1)+d(1)u(1) & 1 \end{bmatrix}$$

而且
$$\hat{V}_1+\hat{B}H=\begin{bmatrix} a(0)x_0+d(0)x_0u(0)+b(0)u(0) \\ b(1)u(1) \end{bmatrix}$$

所以，我们得到

$$\begin{aligned} G&=L^{-1}[\hat{V}_1+\hat{B}H] \\ &=\begin{bmatrix} a(0)x_0+d(0)x_0u(0)+b(0)u(0) \\ [a(0)x_0+d(0)x_0u(0)+b(0)u(0)][a(1)+d(1)u(1)]+b(1)u(1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即
$$x(1)=a(0)x_0+d(0)x_0u(0)+b(0)u(0)$$

$$x(2)=[a(0)x_0+d(0)x_0u(0)+b(0)u(0)]\cdot[a(1)+d(1)u(1)]+b(1)u(1)$$

$$\vdots$$

此结果与从式（5.1）直接求解的结果完全一致。

上例说明，公式（3.20）不仅可用于数值计算，而且可用于系统的理论分析中。对于高阶的系统，用式（3.20）编程计算是容易的，在此不再赘述。

例 2 研究参数估计问题，数据是由以下方程产生的

$$\begin{cases} x(k+1)=a(k)x(k)+d(k)x(k)u(k)+b(k)u(k) \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

设定 $a(k)=1-k$, $b(k)=k+1$, $d(k)=k$

取初始条件及输入信号为

$$\{\ u(k)=1,\ x_0=1\ \};\ \{\ u(k)=2,\ x_0=0\ \};\ \{\ u(k)=-k,\ x_0=-1\ \}$$

因为 $n=r=1$，所以至少需要使用 $n+nr+r=3$ 个输入信号。为简便计，此处取最少的信号数，以说明计算方法。

若取 $N=2$，由此可得出

$$G_1=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},\quad G_2=\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix},\quad G_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

即 $\overline{G}=[2\ 4\ \vdots\ 2\ 8\ \vdots\ -1\ \ -1]^T$

$$\overline{\Omega}=\begin{bmatrix}\Omega_1\\ \cdots\cdots \\ \Omega_2 \\ \cdots\cdots \\ \Omega_3\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2\\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

由式（4.17）可得

$$\hat{Z}=[1\ \ 0\ \vdots\ 0\ \ 1\ \vdots\ 1\ \ 2]$$

这与参数真实值完全一致。当数据存在误差时，输入信号数应大于3个才能使估计值趋近真实参数值。

六、结　论

本文应用增广离散脉冲正交函数矩阵的性质及相应的换位法则和乘法公式，进一步研究了时变双线性系统的分析和参数估计问题。该方法将差分方程问题转化成代数方程求解，从而使计算易于进行。最后的例子说明，这种新方法是有效的。

参 考 文 献

〔1〕 Chen, C. F. and Hsiao, C. H., Walsh Series Systems by Generalized Orthogonal Polynomials, Int. J. Control, 21: 6, (1975), 881—887.

〔2〕 Cheng, B. and Hsu, S. S., Analysis and Parameter Estimation of Bilinear System Via Block-pulse Function, Int. J. Control, 36:1, (1982), 53—65.

〔3〕 I. R. Horng and S. J. Ho, Discrete Pulse Orthogonal Functions for the Analysis, Parameter Estimation and Optimal Control of Linear Digital Systems, Int. J. Control, 45:2, (1987), 597—605.

〔4〕 I. R. Horng and S. J. Ho, Discrete Pulse Orthogonal Functions for the Analysis, Parameter Estimation and Optimal Control of Linear Time-varying Digital Systems, Int. J. Control, 45:6, (1987), 1975—1984.

〔5〕 Tsay, Y, F. and Lee, T. T., Solution of Discrete Systems Via General Discrete Orthogonal Polynomials, Int. J. Control, 44:6, (1986), 1715—1724.

〔6〕 王行愚，块脉冲算子及其在控制理论中的应用，博士论文，华东化工学院，(1984)。

〔7〕 冯恩波、俞金寿、蒋慰孙，一种新的双线性离散系统的分析和参数估计方法，华东化工学院学报，2，(1989)。

A New Approach for Analysis and Parameter Estimation of Bilinear Time-varying Discrete Systems

Feng Enbo, Yu Jinshou, Jiang Weisun

(Research Institute of Automatic control, East China University of Chemical Technology, Shanghai,)

Abstract

This paper discusses the properties of the discrete pulse orthognal functions (DPOFS) and defines a new operational matrix called expanded DPOF matrix. An approach for the analysis and parameter estimation of bilinear time-varying discrete system is established and two useful operational rules between expanded DPOF matrices are given. The DPOFs technique in discrete system problem is more convenient and straightforward than other approaches, By taking the new method, analysis and estimation problems of discrete bilinear systems are simplified to the solution of a set of simultaneous algebaic equations. Two examples are given to illustrate the DPOF approach.