第6卷 第2期 控制理论与应用 Vol.6, No.2
1989年6月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS June, 1989

分散干扰解耦的相容性*

韩 正 之

（上海交通大学自控系）

摘 要

本文讨论分散控制干扰解耦中的结构（A，B_i）不变子空间．发现了它的一个新的必要条件——相容条件，讨论了相容条件的基本性质，并且由此证明了第一个结构（A，B_i）不变子空间的充分必要条件．

一、引 言

根据可以查阅到的文献，分散系统干扰解耦的研究历史至少已经十三年了．文〔1〕试图将集中系统干扰解耦的结论推广到具有两个控制站的分散系统．六年之后，文〔2〕指责它的结论是错误的．不久，文〔2〕的作者增加一些限制条件后给出了一般分散系统(A，B_i)不变子空间的充分必要条件[3]．文〔1〕和〔3〕代表了分散干扰解耦的一种研究框架，这种框架适用局部状态反馈；其背景是互联结构的分散系统．文〔4〕提供了另一种研究框架，它适合于一般的分散输出反馈．最近，文〔5〕和〔6〕用例子说明无论是〔3〕还是〔4〕都没有给出结构（A，B_i）不变子空间的正确结论．这项发现证明了至今为止分散干扰解耦的结论几乎都建筑在错误的基础上．

我们讨论如下的带外干扰的分散系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{\nu}B_iu_i(t)+Eq(t) \tag{1.1}$$

$$z(t)=Dx(t) \tag{1.2}$$

其中，ν是控制站的个数，$x(t)\in R^n$、$u(t)\in R^{m_i}$和$q(t)\in R^q(\forall t\in[0\ \infty))$，$q(t)$是外部干扰，$z(t)\in R^l[\forall t\in[0,\ \infty))$称为被调输出．用$X$表示状态空间，$X_i(i\in\underline{\nu})$是它的子空间．$x_i\in X_i$称为局部状态．分散干扰解耦的基本结论是

定理 1 存在局部状态反馈

$$u_i(t)=K_ix_i(t) \tag{2}$$

使得（1）实现干扰解耦的充分必要条件是存在结构（A，B_i)不变子空间V，使得$Im\,E\subset V\subset \ker D$．

---

*国家自然科学基金资助的课题．

本文于1988年5月9日收到．1988年12月31日收到修改稿．

由定理1，整个分散干扰解耦的关键就成为研究结构（A, B_i）不变子空间的性质以及寻找这样的子空间了。文[5]曾给出过一个充分条件，本文将给出结构（A, B_i）不变子空间的充分必要条件，它极大地依赖于下一节讨论的新概念——相容性。

二、相容性的定义和性质

在研究局部状态反馈的时候，不妨认为

$$\sum_{i=1}^{v} X_i = \bigoplus_{i=1}^{v} X_i \tag{3}$$

显然互联系统能满足条件（3）。

定义 1　$V(\subset X)$线性子空间，如果存在F_i: $X \to U_i$，满足$F_i|\bigoplus_{j\neq i} X_j = 0$，使得 $\left(A+\sum_{i=1}^{v} B_i F_i\right) V \subset V$。那末称$V$是结构$(A, B_i)$不变子空间。

结构(A, B_i)不变子空间全体所成的类记作$I(A, B_i)$，

记T是$\underline{v}$的所有非空子集所成的类。

定义 2　$V(\subset X)$是线性子空间，如果满足

（i）$AV \subset V+\sum_{i=1}^{v} \mathrm{Im} B_i$，（ii）$A(V \cap \bigoplus_{j\in\tau} X_j) \subset V+\sum_{j\in\tau} \mathrm{Im} B_j$，$\forall \tau \in T$ 那末称V是拟结构（A, B_i）不变子空间。

拟结构（A, B_i）不变子空间全体所成的类记作$I_q(A, B_i)$。

命题 1　$I_q(A, B_i) \supset I(A, B_i)$。

限于篇幅，省去这个简单命题的证明。文[6]的例子说明，反过来的包含关系一般是不成立的。

$\tau \in T$，如果$\tau=\{i_1, \cdots, i_p\}$，记$B_\tau=[B_{i_1} \cdots B_{i_p}]$。如果$V \in I_q(A, B_i)$，那末当$v \in V \cap \bigoplus_{j\in\tau} X_j$时，就有$w(v) \in V$和$u_j^\tau(v) \in U_j$，使得

$$Av = w(v)+\sum_{j\in\tau} B_j u_j^\tau(v) = w(v)+B_\tau u^\tau(v) \tag{4}$$

对于给定的v，满足（4）式的$w(v)$和$u^\tau(v)$一般不是唯一的。记$V=\mathrm{Im} V$，V是列满秩矩阵，V也不是唯一的，但当V确定之后只有唯一的$s^\tau(v)$，使得$w^\tau(v)=Vs^\tau(v)$。

命题 2　$v \in V \cap \bigoplus_{j\in\tau} X_j$，$(s_1^\tau(v), u_1^\tau(v))$满足（4）式。$(s_2^\tau(v), u_2^\tau(v))$也满足（4）式的充分必要条件是

$$\begin{bmatrix} s_2^\tau(v) \\ u_2^\tau(v) \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} s_1^\tau(v) \\ u_1^\tau(v) \end{bmatrix} + \mathrm{Ker}[V \quad B_\tau] \tag{5}$$

命题2的证明是直接的。这里略去。它说明满足（4）式的$(s^{\tau}(v),\ u^{\tau}(u))$生成一个子流形。应该注意到$\mathrm{Ker}[V\ B_{\tau}]$由$V$所确定而与矩阵$V$的形式无关。由（5）式知道在$[V\ \ B_{\tau}]$列满秩时，即$V\cap(\mathrm{Im}B_{\tau})=0$时，满足（4）式的$(w^{\tau}(v),\ u^{\tau}(v))$是唯一的。

记 $P^k(k\in \underline{v})$是$\sum_{j=1}^{v}X_j$到X_k的投影。显然它是合理的。如果τ_1、$\tau_2\in T$，$k\in\tau_1\cap\tau_2$，$V\in I_q(AB_i)$，且满足

$$P^k(V\cap\bigoplus_{j\in\tau_1}X_j)\cap P^k(V\cap\bigoplus_{j\in\tau_2}X_j)\neq 0$$

那末存在$v^{\tau_i}\in V\cap\bigoplus_{j\in\tau_i}X_j$，使得$x_k=P^k(v^{\tau_1})=P^k(v^{\tau_2})\neq 0$，于是

$$Av_1^{\tau}=w^{\tau_1}+B_{\tau_1}u^{\tau_1}=w^{\tau_1}+\sum_{j\in\tau_1}B_ju_j^{\tau_1} \tag{5}$$

$$Av_2^{\tau}=w^{\tau_2}+B_{\tau_2}u^{\tau_2}=w^{\tau_2}+\sum_{j\in\tau_2}B_ju_j^{\tau_2} \tag{6}$$

定义 3 $V\in I_q(AB_i)$，$\tau_1\cap\tau_2\neq\phi$，如果$\forall k\in\tau_1\cap\tau_2$，且

$$\forall x_k\in P^k(V\cap\bigoplus_{j\in\tau_1}X_j)\cap P^k(V\cap\bigoplus_{j\in\tau_2}X_j)$$

都有v^{τ_1}和v^{τ_2}以及对应的满足（5）和（6）的$(w^{\tau_1}\ u^{\tau_1})$和$(w^{\tau_2}\ u^{\tau_2})$使得u^{τ_1}和u^{τ_2}中的分量$u_k^{\tau_1}=u_k^{\tau_2}$，那末称$V$关于$\tau_1$和$\tau_2$是相容的。

如果对一切τ_1，$\tau_2\in T$，V和它们都相容，则称V是相容子空间。

从定义3来看，验证相容性相当麻烦，因而需要发掘相容性的特征来减轻验证的工作量。

首先$P^k(V\cap\bigoplus_{j\in\tau_1}X_j)\cap P^k(V\cap\bigoplus_{j\in\tau_1}X_k)$是线性子空间，从而验证只需要对它的任何一组基$\{x_k\}$进行。进一步地有

命题 3 如果存在v^{τ_1}和v^{τ_2}使得（5）和（6）中u^{τ_1}和u^{τ_2}的分量$u_k^{\tau_1}=u_k^{\tau_2}$，那末，$\forall v\in V\cap\bigoplus_{j\in\tau_1}X_j$满足$P^k(v)=P^k(v^{\tau_1})=P^k(v^{\tau_2})$，都可以找到$(w(v),u(v))$，使得$Av=w(v)+\sum_{j\in\tau_1}B_ju_j^{\tau_1}(v)$，且$u_k^{\tau_1}(v)=u_k^{\tau_1}=u_k^{\tau_2}$。

证 $P^k(v)=P^k(v^{\tau_1})$，所以$v-v^{\tau_1}\in V\cap\bigoplus_{j\in\tau_1/\{k\}}X_j$，其中"/"表示集合运算的"差"。利用$V\in I_q(A,\ B_i)$，命题可证，详略。

完全类似的讨论可以用于$V\cap\bigoplus_{j\in\tau_2}X_j$。命题3说明验证相容性与原象$v^{\tau_1}$和$v^{\tau_2}$的选取无关。

命题 4 $V\in I_q(A,\ B_i)$，如果 $\tau_1\subset\tau_2$，那末 V 关于 τ_1 和 τ_2 总是相容的。

命题4可以按照命题3的思路去证明，此处从略。

定理 2 $V\in I_q(A,\ B_i)$，如果对于 $\tau_1,\ \tau_2\in T$，$\tau_1\cap\tau_2\subset \underline{v-2}$ 的 τ_1 和 τ_2，V 和它们是相容的，那末 V 是相容子空间。

证 我们仅证明 $v=3$ 时定理成立，一般情况可以完全类似地讨论。而且不失一般性可用 V 和{ 1，2 }、{ 2，3 }的相容为例。

设 $x_1,\ \cdots,\ x_q$ 是 $P^2(V\cap(X_1\oplus X_2)\cap P^2(V\cap(X_2\oplus X_3)$ 的基，于是有 $\tilde{x}_i\in X_1(i\in \underline{q})$，使 $x_i+\tilde{x}_i\in V\cap(X_1\oplus X_2)$，和 $\approx{x}_i\in X_3(i\in\underline{q})$，使 $x_i+\approx{x}_i\in V\cap(X_2\oplus X_3)$，那末，$\tilde{x}_i-\approx{x}_i\in V\cap(X_1\oplus X_3)(i\in\underline{q})$，根据 $V\in I_q(AB_i)$ 得到

$$A(\tilde{x}_i-\overset{\approx}{x}_i)=w_i^{(3)}+B_1u_{1i}^{(3)}+B_3u_{3i}^{(3)}\tag{7}$$

$$A(x_i+\tilde{x}_i)=w_i^{(1)}+B_1u_{1i}^{(1)}+B_2u_{2i}^{(1)}\tag{8}$$

由于 V 关于 {1，2}和{ 1，3 } 是相 容 的，所以 $u_{1i}^{(3)}=u_{1i}^{(1)}$，因而

$$A(x_i+\overset{\approx}{x}_i)=(w_i^{(1)}-w_i^{(2)})+B_2u_{2i}^{(1)}-B_3u_{3i}^{(3)}(i\in\underline{q})\tag{9}$$

比较（8）和（9）式，V 关于 {1，2} 和 {2，3} 是相容的。

由于指标1，2，…，v 的编排顺序是随意的，因而定理2可以进一步叙述成

定理 2 $V\in I_q(A,\ B_i)$，$i_1,\ i_2,\ \cdots,i_{v-2}$ 是 $v-2$ 个小于 v 的整数。如果 V 关于任意满足 $\tau_1,\ \tau_2\in T$，$\tau_1\cap\tau_2\subset\{\ i_1,\cdots,i_{v-2}\ \}$ 的 τ_1 和 τ_2 是相容的，那末 V 是相容子空间。

根据定理2立即可以得到下面的事实

推论 当 $v=2$ 时，$\forall V\in I_g(A,B_i)$，V 必是相容的。

在验证相容性的时候，还可以利用下列命题。命题可以由直和意义推知，这里只给出它的叙述。

命题 5 $V\in I_q(A,B_i)$，如果 $V+\sum\limits_{j\in\tau_1\cap\tau_2}1mB_j=V\oplus(\bigoplus\limits_{j\in\tau_1u\tau_2}1mB_j)$，那末 V 关于 τ_1 和 τ_2 是相容的。

三、结构（A，Bi ）不变子空间的充分必要条件

这一节要用相容性来描述结构（$A,\ B_i$）不变子空间的充分必要条件。

记 $I_k=\underline{v}/\ \{\ k\ \}=\{\ 1,\ \cdots,\ k-1,\ k+1,\ \cdots v\ \}$。将 V 作直和分解

$$V=V_0\oplus(V\cap\bigoplus_{j=1}^{v}X_i)=V_0\oplus V_v\oplus\hat{V}$$

其中，$\hat{V}=\sum_{i=1}^{\nu}(V\cap\bigoplus_{k\in I_i}X_k)$。记 $\hat{V}_0=V_0\oplus V_\nu$，那末 $\hat{V}_0$ 中元素的特点是：它们都不可能用 $V\cap\bigoplus_{k\in I_i}X_k$ 中向量经过有限次线性运算得到。记 $\hat{X}_k=\sum_{\tau\in T/\underline{\nu}}P^k(V\cap\bigoplus_{j\in\tau}X_j)$ $=\sum_{i=1}^{\nu}P^k(V\cap\bigoplus_{k\in I_i}X_k)$，则 $\hat{X}_k\subset X_k$。利用定义还能得到下述引理，我们略去其证明。

引理 $\hat{V}_0+\hat{X}_k+(\bigoplus_{i\neq k}X_i)=\hat{V}_0\oplus\hat{X}_k\oplus(\bigoplus_{i\neq k}X_i)$

定理 3 $V\in I(A,B_i)$的充分必要条件是

(i) $V\in I_q(A,B_i)$， (ii) V是相容子空间

事实上条件(ii)蕴含条件(i)。我们只是强调才将它们分别列出的。

证 必要性：命题1已经证明(i)是必要。又假如τ_1，$\tau_2\in T$，$k\in\tau_1\cap\tau_2$，存在$v^{\tau_1}\in V\cap(\bigoplus_{j\in\tau_1}X_j)$和$v^{\tau_2}\in V\cap(\bigoplus_{j\in\tau_2}X_j)$使得$P^k(v^{\tau_1})=P^k(v^{\tau_2})\neq0$，那末由条件(i)知道

$$Av^{\tau_1}=w^{\tau_1}+\sum_{j\in\tau_1/\{k\}}B_ju_j^{\tau_1}+B_ku_k^{\tau_1}\tag{10}$$

$$Av^{\tau_2}=w^{\tau_2}+\sum_{j\in\tau_2/\{k\}}B_ju_j^{\tau_2}+B_ku_k^{\tau_2}\tag{11}$$

按照定义1，$F_k(v^{\tau_1})=F_k(P^kv^{\tau_1})=-u_k$，那末根据$\left(A+\sum_{i=1}^{\nu}B_iF_i\right)v^{\tau_1}=w(\in V)$得到

$$Av^{\tau_1}=w+\sum_{j\in\tau_1/\{k\}}B_j(-F_jv^{\tau_1})+B_ku_k\tag{12}$$

于是在(10)中可以取$u_k^{\tau_1}=u_k$。同理在(11)中也可以取$u_k^{\tau_2}=u_k$。从而相容性获证。

充分性：我们有分解式$V=\hat{V}_0\oplus\hat{V}$。记$x_{01}\cdots x_{0p}$是$\hat{V}_0$的一组基。从$\hat{V}_0\subset V$得到

$$Ax_{0l}=w_l+\sum_{i=1}^{\nu}B_iu_{il}\quad(l\in\underline{p})$$

于是可以定义F_k''如下：

$$F_k'':X\longrightarrow U_k\quad(k\in\underline{\nu})$$

$$x_{kl}\longrightarrow-u_{kl}\quad(l\in\underline{p})\text{，其余为零。}$$

那末$\left(A+\sum_{i=1}^{\nu}B_iF_i''\right)\hat{V}_0\subset V$。

记$\hat{X}_k$的基是x_{k1}，$\cdots x_{kp_k}$，$x_{kl}+\tilde{x}_{kl}$是x_{kl}的原象。特别可以做到对某个$\tau_l \in T/\underline{v}$，使得$x_{kl}+\tilde{x}_{kl} \in V \cap (\bigoplus_{j\in\tau_l} X_j)$。那末

$$A(x_{kl}+\tilde{x}_{kl}) = w_{kl} + \sum_{j\in\tau_l/\{k\}} B_j u_{jl} + B_k u_{jk}$$

根据相容性可以定义F'_i如下：

$$F'_k:\ X \to U_k \quad (k \in \underline{v})$$

$$x_{kl} \to -u_{kl} \quad (l \in \underline{p}_k)，其余为零。$$

那末，$(A+\sum_{j\in I_k} B_j F'_j)(V \cap \bigoplus_{j\in I_k} X_j) \subset V$。现在可以定义$F_k$如下：

$$F_k:\ X \to U_k \quad (k \in \underline{v})$$

$$F_k|\hat{V}_0 = F''_k \mid \hat{V}_0$$

$$F_k|\hat{X}_k = F'_k|\hat{X}_k$$

$$F_k|\bigoplus_{j\neq k} X_j = 0，其余为零。$$

那末$\forall v \in V$，$v=\hat{v}+y$，其中$\hat{v}\in\hat{V}_0$，$y\in\hat{V}$。

$$\left(A+\sum_{i=1}^{v} B_i F_i\right)v = \left(A+\sum_{i=1}^{v} B_i F_i\right)\hat{v} + \left(A+\sum_{i=1}^{v} B_i F_i\right)y$$

首先$\left(A+\sum_{i=1}^{v} B_i F_i\right)\hat{v} = \left(A+\sum_{i=1}^{v} B_i F''_i\right)\hat{v} \in V$。然后，由$y\in\hat{V}$，得到分解

$y=\sum_{k=1}^{v} y_k$，其中$y_k \in V\cap(\bigoplus_{j\in I_k} X_j)$，那末

$$\left(A+\sum_{i=1}^{v} B_i F_i\right)y_k = \left(A+\sum_{i\neq k} B_i F_i\right)y_k = \left(A+\sum_{i\in I_k} B_i F'_i\right)y_k \in V。$$

这说明$\left(A+\sum_{i=1}^{v} B_i F_i\right)V \subset V$。

定理3给出了结构$(A，B_i)$不变子空间的充分必要条件。相容性保证了定义F'_k的合理性。

五、结　束　语

上文按照文献〔1〕和〔3〕的研究框架定义了分散干扰解耦的相容概念。研究了它的基

本性质，并且由此获得了结构（A, B_i）不变子空间的充分必要条件。分散干扰解耦研究虽然已经有十三年的历史，但真正的工作尚属开始阶段。可以开发的课题还很多。作者也已经在文〔4〕提供的框架中找到了定义相容性的办法，并且获得了与定理3平行的结果，由于缺少了直和条件，研究途径不尽相同。

参考文献

〔1〕 Hamano F. & Furuta K., Localization of Disturbances and Output Decomposition in Decentralized Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 22:4, (1975), 551—562.

〔2〕 Moog C. H. & Cury J. E. R., Comment on Localization of Disturbances and Output Decomposition in Decentralized Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 34:6, (1981), 1221—1223.

〔3〕 Cury J. E. R., Guerchet P. & Moog C. H., Disturbance decoupling Problem in Decentralized Linear Multivariable, Int. J. Control, 35:6, (1982), 957—965.

〔4〕 Leite V. M. P., Disturbance Decoupling in Decentralized Linear Systems by Nondynamic feedback of State or Measurement, Int. J. Control, 42:4, (1985), 913—937.

〔5〕 Hu Shicai & Zheng Yufan, Remarks on the Decentralized Disturbance Decoupling Problem, Int. J. Control, 46:1, (1987), 97—109.

〔6〕 Han Zhengzhi, The Consistent Condition of Disturbance Decoupling of Decentralized Control, 控制理论与应用, 5:1, (1988), 90—94.

Consistency of Decentralized Disturbance Decoupling

Han Zhengzhi

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University)

Abstract

A key concept of decentralized disturbance decoupling, called structurally $(A,\ B_i)$ invariant subspace, is Studied in this paper. A new necessary condition, consistent condition named by author, is proposed, its fundamental properties are discussed and the sufficient and necessary conditions for structurally $(A,\ B_i)$ invariant subspace is firstly presented.