第6卷 第2期 控制理论与应用 Vol. 6, No.2
1989年6月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS June, 1989

双采样频率多变量自适应控制

张 秋 生

（国家信息中心，北京）

摘 要

本文提出一个稳定的离散时间自适应控制算法。该算法适用于如下的多变量工业过程控制：在这类系统中有两组子系统需要用不同的频率采样，优点是：1）减轻实时计算负担；2）增强采样反馈的鲁棒性。

一、引 言

在一些多变量工业过程控制问题中，不同子系统的动态响应速度相差很大，或者说不同子系统的时间常数有很大差异。在设计这类系统的计算机自适应控制时，根据动态响应的快慢区分子系统组，分别用适当的采样频率以减少在线计算量，是有实际意义的。多采样频率控制的另一个好处是每个子系统的时间常数与其采样周期更为匹配，从而增加了采样反馈的鲁棒性。这是因为对快过程采样频率偏低会引起采样间隔中被控变量的大幅波动，甚至会有稳定性问题。在有些问题里，不同的传感器有不同的固有测量频率，这时处理不同速率的信息是无法避免的。

自适应控制属非线性时变系统，保证其稳定性是困难的，但又是必须的。Zhang和Tomizuka[1,2]提出了双采样频率自适应控制，用时变死区来保证稳定性，并研究了该控制律在一热混合过程上的应用。这样一类二输入输出系统在热工、化工过程中有典型意义。本文改进〔1〕的结果，用新的误差函数保证稳定性，死区范围缩减一半，从而能加快瞬态过程，减小稳态误差。

二、控 制 算 法

设被控过程的数学模型为[2]

$$y_i(k+1)=\theta_i^T\varphi(k) \tag{1}$$

$$\theta_i=[a_{i1}\ a_{i2}\ b_{i1}\ b_{i2}]^T \tag{2a}$$

$$\varphi(k)=[y_1(k)\ y_2(k)\ u_1(k)\ u_2(k)]^T \tag{2b}$$

$y_i(k)$和$u_i(k)$分别是输出和输入变量，$i=1, 2$。θ_i中系数由于过程动特性变化而漂移或阶跃式变动。其变动方式无法预知，只对变动范围有估计。控制目标是使y_i在系统动

本文于1988年7月11日收到。1989年1月12日收到修改稿。

特性不断变化的情况下仍能跟随命令：$y_i(k)\to y_{ic}(k)$。$y_{ic}(k)$对调节问题是零，对跟踪问题是已知有界序列。

在用不同频率对输出变量采样时普通的自适应算法[3]必须加以改进以保证稳定性。不失一般性，假定y_1变化快，因而其采样频率为y_2的两倍。第一步两个输出都采样，即$y_i(0)$已知，$y_2(2n+1)(n=0,1,\cdots)$未知。建议在$\varphi(2n+1)$中用$y_{2c}(2n+1)$代替$y_2(2n+1)$，并定义

$$\phi(2n+1)=[y_1(2n+1)\ y_{2c}(2n+1)\ u_1(2n+1)\ u_2(2n+1)]^T \tag{3}$$

我们提出如下的算法：

对$k=2n+1$，$n=0,1,\cdots$，

$$\hat{\theta}_1(2n+1)=\hat{\theta}_1(2n)+\frac{a\varphi(2n)e_1(2n+1)}{1+\|\varphi(2n)\|^2} \tag{4}$$

$$e_1(2n+1)=y_1(2n+1)-\varphi^T(2n)\hat{\theta}_1(2n) \tag{5}$$

$$\hat{\theta}_2(2n+1)=\hat{\theta}_2(2n) \tag{6}$$

$$y_{ic}(2n+2)=\hat{\theta}_i^T(2n+1)\phi(2n+1) \tag{7}$$

对$k=2n+2$，$n=0,1,\cdots$，

$$\hat{\theta}_i(2n+2)=\hat{\theta}_i(2n+1)+\frac{a\phi(2n+1)g[e_i(2n+2)]}{1+\|\phi(2n+1)\|^2} \tag{8}$$

$$e_i(2n+2)=y_i(2n+2)-\phi^T(2n+1)\hat{\theta}_i(2n+1) \tag{9}$$

$$g[e_i(2n+2)]=\begin{cases} e_i(2n+2)-A_{i2}M\|\varphi(2n)\|, & \text{如果 } e_i(2n+2)>A_{i2}M\|\varphi(2n)\| \\ 0, & \text{如果 } |e_i(2n+2)|\leqslant A_{i2}M\|\varphi(2n)\| \\ e_i(2n+2)+A_{i2}M\|\varphi(2n)\|, & \text{如果 } e_i(2n+2)<-A_{i2}M\|\varphi(2n)\| \end{cases} \tag{10}$$

$$y_{ic}(2n+3)=\varphi^T(2n+2)\hat{\theta}_i(2n+2) \tag{11}$$

$\|\varphi\|=(\varphi^T\varphi)^{\frac{1}{2}}$是$\varphi$的欧氏范数，$M$是初始参数估计误差$\|\theta_2-\hat{\theta}_2(0)\|$的一个上界，$A_{i2}$是$|a_{i2}|$的上界。为保证稳定性，须知这些参数变化范围的上界。基于对被控过程的了解这往往在实际中可以做到。控制变量$u_i(2n+1)$和$u_i(2n+2)$分别由（7）和（11）解出。系数a通常等于1，详见文献[3]。

以上算法中，函数$g(\cdot)$起死区作用。与[1]中结果比较，尺寸减少了一半。这能缩短瞬态过程并降低稳态误差。

三、稳 定 性 证 明

定义$\tilde{\theta}_i(k)=\theta_i-\hat{\theta}_i(k)$。由$i=1$，$k=1(n=0)$开始。由（1）、（4）

$$\|\tilde{\theta}_1(1)\|^2-\|\tilde{\theta}_1(0)\|^2=\left[-2+\frac{\|\varphi(0)\|^2}{1+\|\varphi(0)\|^2}\right]\frac{e_1^2(1)}{1+\|\varphi(0)\|^2}\leqslant 0 \tag{12}$$

所以$\|\tilde{\theta}_1(1)\|\leqslant\|\tilde{\theta}_1(0)\|$。并由（6），$\|\tilde{\theta}_2(1)\|=\|\tilde{\theta}_2(0)\|$。再令$k=2$，由（8）得

$$\|\tilde{\theta}_i(2)\|^2-\|\tilde{\theta}_i(1)\|^2=-\frac{2\phi^T(1)\tilde{\theta}_i(1)g[e_i(2)]}{1+\|\phi(1)\|^2}+\frac{\|\phi(1)\|^2g^2[e_i(2)]}{[1+\|\phi(1)\|^2]^2} \tag{13}$$

记$\phi^T(k)\tilde{\theta}_i(k)$为$\varepsilon_i(k+1)$。使上式非正的一个充分条件是

$$\varepsilon_i(2)g[e_i(2)]\geqslant g^2(e_i(2)) \tag{14}$$

或，当$g\neq0$时，

$$|\varepsilon_i(2)|\geqslant|g(e_i(2))| \tag{15}$$

由（9）和（1），

$$e_i(2)=\varphi^T(1)\theta_i-\phi^T(1)\hat{\theta}_i(1)=\phi^T(1)\tilde{\theta}_i(1)+\theta_i^T[\varphi(1)-\phi(1)]=\varepsilon_i(2)+d_i(2) \tag{16}$$

这里，$d_i(2)=\theta_i^T[\varphi(1)-\phi(1)]$。由（1），（3）和（11）

$$d_i(2)=a_{i2}[y_2(1)-y_{2c}(1)]=a_{i2}\varphi^T(0)\tilde{\theta}_2(0)$$

由Schwarz不等式和已知信息，

$$|d_i(2)|\leqslant|a_{i2}|\,\|\tilde{\theta}_2(0)\|\,\|\varphi(0)\|\leqslant A_{i2}M\|\varphi(0)\| \tag{17}$$

由（16）和（17），

$$|\varepsilon_i(2)|\geqslant|e_i(2)|-|d_i(2)|\geqslant|e_i(2)|-A_{i2}M\|\varphi(0)\| \tag{18}$$

如果g选得使

$$|e_i(2)|-A_{i2}M\|\varphi(0)\|\geqslant|g(e_i(2))| \tag{19}$$

则条件（14）满足，$\|\tilde{\theta}_i(2)\|\leqslant\|\tilde{\theta}_i(1)\|$。容易证明（10）给出的$g$满足（19）。对所有$k$值同样分析可得出$\|\tilde{\theta}_i(k)\|$收敛，即$\|\tilde{\theta}_i(\infty)\|$存在。

令$i=1$，（12）（单数步）和（13）（双数步）的一般式分别是：

$$\|\tilde{\theta}_1(2n+1)\|^2-\|\tilde{\theta}_1(2n)\|^2=-\frac{2e_1^2(2n+1)}{1+\|\varphi(2n)\|^2}+\frac{\|\varphi(2n)\|^2e_1^2(2n+1)}{[1+\|\varphi(2n)\|^2]^2} \tag{20}$$

$$\|\tilde{\theta}_1(2n+2)\|^2-\|\tilde{\theta}_1(2n+1)\|^2=-\frac{2\varepsilon_1(2n+2)g(e_1(2n+2))}{1+\|\phi(2n+1)\|^2}+\frac{\|\phi(2n+1)\|^2g^2(e_1(2n+2))}{[1+\|\phi(2n+1)\|^2]^2} \tag{21}$$

相加后取总和，左边得$\|\tilde{\theta}_1(\infty)\|^2-\|\tilde{\theta}_1(0)\|^2$（有限），右边无穷和通项应趋于零：

$$\left|\frac{e_1^2(2n+1)}{1+\|\varphi(2n)\|^2}\left[2-\frac{\|\varphi(2n)\|^2}{1+\|\varphi(2n)\|^2}\right]+\frac{2\varepsilon_1(2n+2)g(e_1)}{1+\|\phi(2n+1)\|^2}-\frac{\|\phi(2n+1)\|^2g^2(e_1)}{[1+\|\phi(2n+1)\|^2]^2}\right|\to0 \tag{22}$$

下面用反证法证明 $e_i(k)$ 的有界性[3]。如 $e_1(k)$ 无界，$|e_1(k)|\to\infty$，$|g(e_1(k))|\to\infty$。对任何 k，

$$\max_{\tau\leqslant k}|e_1(\tau)| = |e_1(k)| \tag{23}$$

由（5）、（11）、（9）和（7），（以下 $C_1\sim C_7$）均为常数）

$$|y_1(k)|\leqslant C_1 + C_2\max_{\tau\leqslant k}|e_1(\tau)| \tag{24}$$

对系统（1）有界输出只能由有界输入产生，所以 $\|\varphi\|$ 和 $\|\phi\|$（包含 u_i，y_i 和有界的 y_{ic}）以 $|y_1|$ 为界。再由（24）有

$$\|\varphi(k-1)\|\leqslant C_3 + C_4\max_{\tau\leqslant k}|e_1(\tau)| \tag{25}$$

$$\|\phi(k-1)\|\leqslant C_5 + C_6\max_{\tau\leqslant k}|e_1(\tau)| \tag{26}$$

条件（14）的一般式是（$i=1$）

$$\varepsilon_1(2n+2)g(e_1(2n+2))\geqslant g^2(e_1(2n+2)) \tag{27}$$

（27）意味着（22）的左边项大于或等于（用（25）、（26）和（23））

$$\left|\frac{e_1^2(2n+1)}{1+\|\varphi(2n)\|^2}+\frac{g^2(e_1(2n+2))}{1+\|\phi(2n+1)\|^2}\right|$$

$$\geqslant\left|\frac{e_1^2(2n+1)}{1+[C_3+C_4\max\limits_{\tau\leqslant 2n+1}|e_1(\tau)|]^2}+\frac{g^2(e_1(2n+2))}{1+[C_5+C_5\max\limits_{\tau\leqslant 2n+2}|e_1(\tau)|]^2}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\left[\dfrac{1}{e_1^2(2n+1)}+\left[\dfrac{C_3}{e_1(2n+1)}+C_4\right]\right]^2}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\dfrac{1}{g^2(e_1(2n+2))}+\left[\dfrac{C_5}{g(e_1(2n+2))}+C_6\dfrac{|e_1(2n+2)|}{|g(e_1(2n+2))|}\right]^2}\right| \tag{28}$$

$g(e_1(2n+2))$ 是 $e_1(2n+2)$ 和 $\|\varphi(2n)\|$ 的线性函数，而 $\|\varphi(2n)\|$ 的增大以 $|e_1(2n+2)|$ 的为界，所以 $|g(e_1(2n+2))|$ 与 $|e_1(2n+2)|$ 同阶增大。于是有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_1(2n+2)}{g(e_1(2n+2))}\right| = C_7<\infty$$

由此得出（28）的极限（当 $n\to\infty$ 时）是 $|C_4^{-2}+C_6^{-2}C_7^{-2}|>0$。但这与事实（22）矛盾，所以 $e_1(k)$（因而 $g(e_1(k))$）只能是有界的。并且，由于死区外连续的参数调整，g 终将消失为零，这证明误差最终被限制在死区里。

以上分析也适用于$i=2$情况（略去）。这一节证明了：1）参数估计误差的范数收敛；2）输出误差有界。

四、讨 论

本文提出的算法的主要优点是可以减少在线计算量而仍保证稳定性。该算法不需计算$e_2(2n+1)$和$\hat{\theta}_2(2n+1)$，省去很多矢量运算。在双数步需计算g，但这是标量运算，因为$\|\varphi(2n)\|$在前一步用到时即已算过并储存下来。

对有两个以上输入输出的系统，只要能将输出按时间常数大小分组，分别用快采样和慢采样，仍可用本算法的推广形式（这里略去）。当采样频率之比是大于2的整数时，本文分析方法仍有效，但死区尺寸会增加，详见〔1〕。不过在自适应调节($y_{ic}(k)\equiv 0$)时，$u_i(k)$和$y_i(k)$都趋于零，所以死区尺寸和输出误差都将消失为零而无稳态误差。因此本算法更适宜于零命令值自适应调节问题。

参 考 文 献

〔1〕 Zhang, Q., Tomizuka, M., Multirate Sampling Adaptive Control and Its Application to Thermal Mixing Systems, International Journal of Control, 47:3, (1988), 735—744.

〔2〕 Zhang, Q., Tomizuka, M., Multivariable Direct Adaptive Control of Thermal Mixing Processes, Trans. of the American Society of Mech. Engrs, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 107:4 (Dec,1985), 278—283.

〔3〕 Goodwin, G. C., Ramadge, P. J., Caines, P. E., Discrete-time Multivariable Adaptive Control, IEEE Trans. AC-25, (1980), 449—456.

Multivariable Adaptive Control with Two Sampling Frequencies

Zhang Qiusheng

(The State Information Center, Beijing)

Abstract

A stable discrete-time adaptive control algorithm is proposed. The algorithm is suitable for controlling a class of multivariable industrial processes, in which it is advantageous to sample two groups of subsystems at different frequencies in order to reduce computational burden and enhance robustness with respect to sampling feedback.