第6卷 第3期　　控制理论与应用　　Vol.6, No.3
1989年9月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Sept., 1989

线性定常中立型大系统的稳定性

谢胜利
（湖北荆州师范专科学校）

摘　要

本文讨论了线性定常中立型大系统的稳定性，得到了若干充分判据．我们对中立项的处理不同于已有的方法，另外找到了$\dot{x}_i(t-\tau)$与$x_i(t-\tau)$的转换途径，为这类问题研究给出了一种新方法．

关键词：大系统；稳定性；中立型系统；时滞

刘永清于1958年就利用特征根方法研究了中立型微分方程的稳定性[1]．由于在中立型系统稳定性的讨论中对中立项$\dot{x}(t-\tau)$的处理比较棘手，从而对问题的讨论带来一定障碍，使之进展较慢．尤其是对中立型大系统，自廖晓昕[2]首次运用分块迭代的方法对中立型大系统进行讨论以来，其它结果很少．我们在〔3—7〕中，也分别用不同的方法研究了中立型大系统的稳定性．

本文利用不同于以上诸方法，对此问题进行了讨论，找到了中立项$\dot{x}(t-\tau)$与滞后项$X(t-\tau)$的另外一种转换方法，从而对这类问题给出了一种新的研究途径，并直接通过分解后的孤立子系统与耦合项的关系，给出了一些简单的稳定性代数判据，补充了这方面的研究．

考虑定常中立型大系统

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{N}B_{ij}x_j(t-\tau)+\sum_{j=1}^{N}C_{ij}\dot{x}_j(t-\tau),\quad i=1,\cdots,N \tag{1}$$

其中A_{ij}，B_{ij}，C_{ij}均为$n_i\times n_j$常矩阵，$x_i\in R^{n_i}$，$X=[x_1^T,\cdots,x_N^T]^T$，$\sum_{i=1}^{N}n_i=n$，而时滞$\tau\geqslant0$．

定理1　若矩阵$\widetilde{C}$的谱半径$\rho(\widetilde{C})<1$，且$D\triangleq\alpha I-P$为M矩阵．则中立型大系统(1)的零解是渐近稳定的．其中$\alpha=\min\{\alpha_i\}$，$-\alpha_i=\mathrm{Re}\lambda_{\max}(A_{ii})<0$；$P=(I-\widetilde{C})^{-1}(\widetilde{A}+\widetilde{B})$，$\widetilde{A}=(\|A_{ij}\|\delta_{ij}^*)$，$\widetilde{B}=(\|B_{ij}+A_{ii}C_{ij}\|e^{\alpha\tau})$，$\widetilde{C}=(\|C_{ij}\|e^{\alpha\tau})$是$N\times N$常矩阵，$\delta_{ij}^*=\begin{cases}0, & j=i\\ 1, & j\neq i.\end{cases}$

本文于1988年8月20日收到，1989年3月14日收到修改稿．

证 对系统（1）应用常数变易法

$$x_i(t)=e^{A_{ii}(t-t_0)}\Big(x_i(t_0)+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}e^{-A_{ii}(s-t_0)}A_{ij}\delta_{ij}^{*}x_j(s)\mathrm{d}s$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}e^{-A_{ii}(s-t_0)}B_{ij}x_j(s-\tau)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}e^{-A_{ii}(s-t_0)}C_{ij}\dot{x}_j(s-\tau)\mathrm{d}s\Big)$$

$$=e^{A_{ii}(t-t_0)}(x_i(t_0)-\sum_{j=1}^{N}C_{ij}x_j(t_0-\tau)+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}e^{-A_{ii}(s-t_0)}A_{ij}x_j(s)\delta_{ij}^{*}\mathrm{d}s$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}e^{-A_{ii}(s-t_0)}(B_{ij}+A_{ii}C_{ij})x_j(s-\tau)\mathrm{d}s)+\sum_{j=1}^{N}C_{ij}x_j(t-\tau) \tag{2}$$

设 $\phi_i=\sup\limits_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0}\|x_i(t)\|$，$i=1,\cdots,N$，由（2）我们可得：

$$\|x_i(t)\|e^{\alpha(t-t_0)}\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|\|x_j(t-\tau)\|e^{\alpha(t-t_0)}+\phi_i+\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|\phi_j$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}\|A_{ij}\|\delta_{ij}^{*}\|x_j(s)\|e^{\alpha(s-t_0)}\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}\|B_{ij}+A_{ii}C_{ij}\|\|x_j(s-\tau)\|e^{\alpha(s-t_0)}\mathrm{d}s$$

$$\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\{\|x_i(s)\|e^{\alpha(s-t_0)}\}\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|e^{\alpha\tau}\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\{\|x_i(s)\|e^{\alpha(s-t_0)}\}+\phi_i$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|\phi_j+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}\|A_{ij}\|\delta_{ij}^{*}\sup_{s-\tau\leqslant\eta\leqslant s}\{\|x_j(\eta)\|e^{\alpha(\eta-t_0)}\}\mathrm{d}s$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}\|B_{ij}+A_{ii}C_{ij}\|e^{\alpha\tau}\sup_{s-\tau\leqslant\eta\leqslant s}\{\|x_j(\eta)\|e^{\alpha(\eta-t_0)}\}\mathrm{d}s \tag{3}$$

记 $u_i(t)=\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\{\|x_i(s)\|e^{\alpha(s-t_0)}\}$，$u=[u_1,\cdots,u_N]^T$，$\phi=[\phi_1,\cdots,\phi_N]^T$，则

$$u(t)\leqslant\widetilde{C}u(t)+(I+C^{*})\phi+\int_{t_0}^{t}(\widetilde{A}+\widetilde{B})u(s)\mathrm{d}s \tag{4}$$

其中$C^{*}=(\|C_{ij}\|)$，由于$\rho(\widetilde{C})<1$，则$(I-\widetilde{C})^{-1}$存在且非负[8]，则

$$u(t)\leqslant(I-\widetilde{C})^{-1}(I+C^{*})\phi+\int_{t_0}^{t}(I-\widetilde{C})^{-1}(\widetilde{A}+\widetilde{B})u(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

令 $v(t)=u(t)e^{-\alpha(t-t_0)}$，$(I-\widetilde{C})^{-1}(I+C^{*})=E$，则

$$v(t)\leqslant e^{-\alpha(t-t_0)}(E\phi+\int_{t_0}^{t}Pv(s)e^{\alpha(s-t_0)}\mathrm{d}s)\triangleq W(t) \tag{6}$$

从而$W(t_0)=E\phi$，且由P非负性有

$$\dot{W}(t)=-\alpha W(t)+Pv(t)\leqslant-\alpha W(t)+PW(t)=-DW(t) \tag{7}$$

因D是M矩阵，由〔8〕知存在正数L，r使得

$$\|W(t)\|\leqslant L\|W(t_0)\|e^{-r(t-t_0)} \tag{8}$$

因$\|x_i\|e^{\alpha(t-t_0)}\leqslant \sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\{\|x_i(s)\|e^{\alpha(s-t_0)}\}=u_i(t)=v_i(t)e^{\alpha(t-t_0)}$，则有$\|x_i\|\leqslant v_i$，从而$[\|x_1\|,\cdots,\|x_N\|]^T\leqslant v(t)\leqslant W(t)$。由此

$$\|X\|\leqslant\widetilde{L}\|W(t)\|\leqslant\widetilde{L}L\|E\|\|\phi\|e^{-r(t-t_0)} \tag{9}$$

由（9）可推得，系统（1）的零解是渐近稳定的。

定理 2　若C^*的谱半径$\rho(C^*)<1$，且$\alpha I-Q$是M矩阵。则中立大系统（1）的零解是渐近稳定的。其中$Q=(I-C^*)^{-1}(A^*+B^*)$；$C^*=(\|C_{ij}\|)$，$A^*=(\|A_{ij}\|\delta^*_{ij}e^{\alpha\tau})$，$B^*=(\|B_{ij}+A_{ii}C_{ij}\|e^{\alpha\tau})$。而$\alpha$与$\delta^*_{ij}$同定理1中一样。

证　由（2）式，我们可推得

$$\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\{\|x_i(s)\|\}\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\{\|x_j(s)\|\}+\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|\phi_j e^{-\alpha(t-\tau-t_0)}$$
$$+e^{-\alpha(t-\tau-t_0)}\Big(\phi_i+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}e^{\alpha(s-t_0)}\|A_{ij}\|\delta^*_{ij}\sup_{s-\tau\leqslant\eta\leqslant s}\{\|x_j(\eta)\|\}$$
$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}e^{\alpha(s-t_0)}\|B_{ij}+A_{ii}C_{ij}\|\sup_{s-\tau\leqslant\eta\leqslant s}\{\|x_j(\eta)\|\}ds\Big) \tag{10}$$

记$u_i^*=e^{\alpha(t-t_0)}\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\{\|x_i(s)\|\}$，则

$$u_i^*(t)\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|u_j^*(t)+\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|e^{\alpha\tau}\phi_j+e^{\alpha\tau}\phi_i+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}\|A_{ij}\|\delta^*_{ij}e^{\alpha\tau}u_j^*(s)ds$$
$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{N}\|A_{ij}+A_{ii}C_{ij}\|e^{\alpha\tau}u_j^*(s)ds \tag{11}$$

$$u^*\leqslant C^*u^*+(I+C^*)\phi e^{\alpha\tau}+\int_{t_0}^{t}(A^*+B^*)u^*(s)ds \tag{12}$$

其中$u^*=[u_1^*,\cdots,u_N^*]^T$，由$\rho(C^*)<1$，则可得

$$v^*\leqslant e^{-\alpha(t-t_0)}\Big(E^*\phi+\int_{t_0}^{t}Qv^*(s)e^{\alpha(s-t_0)}ds\Big)\triangleq y(t) \tag{13}$$

其中$v^*(t)=u^*(t)e^{-\alpha(t-t_0)}$，$E^*=(I-C^*)^{-1}(C^*+I)e^{\alpha\tau}$，由$Q$非负，则有

$$\dot{y}(t)=-\alpha y(t)+Qv^*(t)\leqslant-(\alpha I-Q)y(t) \tag{14}$$

注意$\alpha I-Q$是M矩阵，再重复定理1的有关推导，便可得结果。

定理 3　若 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\sum\limits_{i=1}^{N}\|C_{ij}\|\leqslant l<1$，$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\sum\limits_{i=1}^{N}\|A_{ij}\|\delta_{ij}^{*}\leqslant h$，$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\sum\limits_{i=1}^{N}\|B_{ij}+A_{ii}C_{ij}\|\leqslant m$，且 $\alpha>\frac{1}{1-l}(h+m)e^{\alpha\tau}$。则系统（1）的零解是渐近稳定的，$\alpha$与定理1中相同。

证　由（10）式，并记$W_i(t)=\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\{\|x_i(s)\|\}$，则

$$\sum_{i=1}^{N}W_i(t)\leqslant l\sum_{j=1}^{N}W_j(t)+e^{-\alpha(t-\tau-t_0)}\Big(l\sum_{j=1}^{N}\phi_j+\sum_{i=1}^{N}\phi_i$$

$$+\int_{t_0}^{t}he^{\alpha(s-t_0)}\sum_{j=1}^{N}W_j(s)ds+\int_{t_0}^{t}me^{\alpha(s-t_0)}\sum_{j=1}^{N}W_j(s)ds\Big)\qquad(15)$$

由于$l<1$，则有

$$\sum_{i=1}^{N}W_i(t)\leqslant e^{-\alpha(t-\tau-t_0)}\Big(\frac{1+l}{1-l}\sum_{i=1}^{N}\phi_i+\int_{t_0}^{t}\frac{h+m}{1-l}e^{\alpha(s-t_0)}\sum_{i=1}^{N}W_i(s)ds\Big)\qquad(16)$$

记（16）式右端为$q(t)$，则 $q(t_0)=\frac{1+l}{1-l}e^{\alpha\tau}\sum\limits_{i=1}^{N}\phi_i$，且

$$\dot{q}(t)=-\alpha q(t)+\frac{1}{1-l}(h+m)e^{\alpha\tau}\sum_{i=1}^{N}W_i(t)\leqslant-\Big[\alpha-\frac{1}{1-l}(h+m)e^{\alpha\tau}\Big]q(t)$$

由此，类似于前面推导知，系统（1）的零解是渐近稳定的。

由（2）式我们还可得到

定理 4　若矩阵$G=\{g_{ij}\}$的谱半径$\rho(G)<1$，则系统（1）的零解是渐近稳定的。其中$\alpha_i=\mathrm{Re}\lambda_{\max}(A_{ii})$，$g_{ij}=\|C_{ij}\|+(\|A_{ij}\|\delta_{ij}^{*}+\|B_{ij}+A_{ii}C_{ij}\|)/\alpha_i$。

参 考 文 献

〔1〕刘永清，微分差分方程的稳定性，数学进展，4，2（1958），297—303.

〔2〕廖晓昕，中立型大系统稳定性的分块迭代法，中国科学（A 辑），9，（1985），784—798.

〔3〕谢胜利，The Stability For A Class Nonlinear Large—Scale Dynamical Systems of Neutral Type，华中师大学报（微分方程专辑）2，(1986)145—152.

〔4〕谢胜利，关于中立型大系统的稳定性，科学通报，32，12，（1987），891—896.

〔5〕谢胜利，一类中立型大系统的稳定性，常微分方程与控制论讨论会论文集，华中师范大学出版社，武汉，（1988），227—236.

〔6〕谢胜利，具变量时滞的中立型大系统的C_1稳定性，数学年刊（待发表）。

〔7〕Xie Shengli（谢胜利），The Stability of Large-Scale Dynamic Systems

of Neutral Type, KEXUE TONGBAO,33,9(1988), 705—711.
〔8〕 Lasalle, J.P., 著,廖晓昕等译,动力系统的稳定性,华中工学院出版社, 武汉,(1983).

On the Stability of Linear Constant Large-scale Neutral Type System with Time-delay

Xie Shengli

(Jingzhou Teacher's College, Hubei)

Abstract

In this paper, we discuss the stability of linear constant large-scale neutral type system with time-delay, and obtain the sufficient conditions. We also get the relationship between $\dot{x}_i(t-\tau)$ and $x_i(t-\tau)$, thus we proposed a new approach for studying this problem.

Key words——Large scale system; Stability; Neutral type system; Time-delays