第6卷 第4期
1989年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPTICATIONS

Vol. 6, No. 4
Dec., 1989

# 广义系统中的非动态变量

杨成梧　谭华林

（华东工学院八系，南京）

**摘　　要**

本文深入考察了广义系统的特有现象——非动态变量及其在系统等价、能控能观性和实现问题等方面的影响，得到了一些新见解和新结果。

**关键词**：广义系统；最小实现；能控能观性。

Verghese[1]指出，广义系统状态空间中，初值在有些方向上对系统性质无关紧要，且系统在这些方向上的演变由常值矩阵乘输入的简单运算确定。Verghese把代表这些非动态性质的方向的变量称为非动态变量，并由此建立了强等价等一系列概念，深化了广义系统的研究。但他却仅此为止，没有系统地考察非动态变量。鉴于非动态变量对广义系统的特殊意义，本文对此概念进行深入研究，结果表明它确为广义系统的特有现象。

## 一、非动态变量

考察广义系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx \tag{1}$$

或

$$\left[\begin{array}{c|c} sE-A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} X(s) \\ \hline U(s) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} Ex(0-) \\ \hline Y(s) \end{array}\right] \tag{1'}$$

恒假定系统（1）正则，即 $\det(sE-A)\neq 0$。由矩阵束理论知存在非奇异阵$M$，$N$使

$$M(sE-A)N=\begin{bmatrix} sI_r-\bar{A} & 0 \\ 0 & I_{n-r}-sJ \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中 $r=\mathrm{rank}E$，$J$为对角线元素全为0的Jordan阵。记

$$J=\begin{bmatrix} \hat{J} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

本文于1988年6月11日收到，1989年6月9日收到修改稿。

其中$\hat{J}$不含一阶零特征值 Jordan 阵，则(1′)为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} sI-\bar{A} & & & -\bar{B} \\ & I-s\hat{J} & & -\hat{B} \\ & & I & -B^* \\ \hline \bar{C} & \hat{C} & C^* & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \bar{X}(s) \\ \hat{X}(s) \\ X^*(s) \\ \hline U(s) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \bar{x}(0-) \\ -\hat{J}\hat{x}(0-) \\ 0 \\ \hline Y(s) \end{array}\right) \tag{3}$$

至此，系统（1）的非动态变量就是$x^*$。易见，$x^*$不受初值影响，且$X^*(s)=B^*U(s)$。

由上述讨论立即有

**定理 1**　系统（1）有非动态变量的充要条件是，矩阵$E$必以$\lambda$作为它的初等因子。

**推论 1**　若$E$的最小多项式中因子$\lambda$的次数是1，则所有与$E$的零特征值对应的状态变量均是非动态变量。

由（3）式可得系统（1）的传递函数阵为

$$H(s)=\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\hat{C}(I-s\hat{J})^{-1}\hat{B}+C^*B^*$$

因此，非动态变量在传递函数中表现为常值矩阵部分。特别地，若推论 1 的条件满足，则

$$H(s)=\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+C^*B^*$$

由正常系统的实现理论可知，可把它实现为

$$\begin{aligned} \dot{x}&=\bar{A}x+\bar{B}u \\ y&=\bar{C}x+C^*B^*u \end{aligned} \tag{4}$$

因此从实质上系统（4）是一种广义系统。这样，所有线性定常系统都可由如下模型表示

$$\begin{aligned} E\dot{x}&=Ax+Bu \\ y&=Cx \end{aligned} \tag{5}$$

$E$奇异表广义系统，$E$非奇异表正常系统。

非动态变量对系统等价带来新的理解。Rosenbrock[2]的受限系统等价($r.s.e.$)保持了系统的结构性质，但因它对动态和非动态变量同样处理而受到局限；Verghese[1]强等价试图把非动态变量完全“压缩”掉，如把（3）式变为

$$\left(\begin{array}{cc|c} sI-\bar{A} & & -\bar{B} \\ & I-s\hat{J} & -\hat{B} \\ \hline \bar{C} & \hat{C} & C^*B^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \bar{X}(s) \\ \hat{X}(s) \\ \hline U(s) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \bar{x}(0-) \\ -\hat{J}\hat{x}(0-) \\ \hline Y(s) \end{array}\right) \tag{6}$$

但上述讨论表明，这没有带来实质性的变化。为此，提出如下新定义。

**定 义**（受限强等价）　$r.s.e.$变换[2]、平凡压缩和平凡扩充[1]统称为受限允许变换；两个广义系统称为是受限强等价的，如果其中一个可通过一系列受限允许变换由

另一个得到。

易证受限强等价是等价关系，且保持了有关强等价的结论。另外，此定义也反映出非动态变量是广义系统的固有性质，它并不总是能压缩掉的。

## 二、最小实现的新结果

文〔3〕详尽讨论了广义系统的最小实现问题，指出了非动态变量在最小实现理论中的特殊意义。需要说明的是，该文及文〔4〕的结果都基于一个没有明确提出的前提：广义系统模型都具有（1）的形式。由上节的讨论可得实现基本定理：

**定理 2** 任给有理分式阵$H(s)$，它能实现为正常系统的充要条件是$H(s)$严格真，而它能实现为广义系统的充要条件是$H(s)$不严格真。

为得到最小实现的进一步结果，先证如下引理。

**引 理** 给定强能控（或强能观）广义系统

$$\left[\begin{array}{c|c} I-sJ & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \tag{7}$$

其中$J$是幂零 Jordan 阵，一般地，相应正常系统

$$\left[\begin{array}{c|c} sI-J & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \tag{8}$$

不完全能控（或不完全能观）。但是，可通过受限允许变换使系统（7）变为同样形式的另一系统，且这时与之相应的系统（8）完全能控（或完全能观）。

证 记（7）式为

$$\left[\begin{array}{c|c} I-sJ & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c} I-s\hat{J} & & -\hat{B} \\ & I & -B^* \\ \hline \hat{C} & C^* & 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

其中$\hat{J}$不含一阶幂零 Jordan 块，则易证（也可参见〔1〕）：

i）系统（7）强能控等价于$\hat{B}$中与各 Jordan 块最后一行相对应的行向量组$\{b_i\}$线性无关；

而由文〔5〕知：

ii）系统（8）完全能控等价于向量组$\{b_i\}$及$B^*$的行向量线性无关。

因此，只须证通过受限允许变换后可使系统（7）或（9）变成同样形式的另一系统，而这时 ii）满足。

不妨设$B^*$中某行$b_K^*$与$\{b_i\}$线性相关（若$B^*$的各行线性相关，则系统（7）不强能控，故可排除此情况），由此可用$\{b_i\}$的一个线性组合（即对（9）施行一次受限允许

变换）把 $b_K^*$ 变为 0．考虑到与 $b_i$ 相对应的 $I-sJ$ 中的行是单位阵的某一行，故可利用（9）式中的单位阵进行列变换（也是受限允许变换）消去第一次变换中在（9）式分块矩阵中第二行第一列产生的非零块，这样得到一个除去 $b_K^*$ 变为0，$\hat{C}$ 中与各 Jordan 块最后一列相应的列变动外，其他部分均未变换的系统。再利用平凡压缩变换压缩掉 $b_K^*=$ ，即得到一个与（9）同形且受限强等价，却又使 ii）满足的系统。

对强能观的情形同理可证。　　证毕

由引理立即可得：

**推论 2**　若强能控（或强能观）系统不含非动态变量，则该系统 $C-$ 能控（或 $C-$ 能观）。

进一步，有如下结论。

**定理 3**　$C-$ 能控性等价于强能控且系统不能进行平凡（行）压缩变换；$C-$ 能观性等价于强能观且系统不能进行平凡（列）压缩变换。

证　不妨设广义系统具有（7）的形式。文[6]表明，系统（7）的 $C-$ 能控性等价于系统（8）的完全能控性；而显然（7）不能进行平凡（行）压缩变换等价于引理证明中 $B^*$ 的行向量都与 $\{b_i\}$ 线性无关，故得证能控的情形。能观情形同理。

由引理及文[1]中类似的方法可证：

**定理 4**　两个强能控强能观广义系统受限强等价的充要条件是它们具有相同的传递函数阵。

对广义系统的 Kalman 形式的分解，Verghese[1] 给出强能控强能观下的分解形式，由引理的证明过程可知，对强能控强能观下分解式的每一子块，完全可以用 $C-$ 能控 $C-$ 能观对其进行进一步的分解，再重新组合，得到如下结论：

**定理 5**　广义系统（1）的系统矩阵可通过受限强等价变换化为如下形式：

$$\left(\begin{array}{cccc:c} sE_{\bar{o}c}-A_{\bar{o}c} & * & * & * & -B_{\bar{o}c} \\ & sE_{\bar{o}\bar{c}}-A_{\bar{o}\bar{c}} & 0 & * & 0 \\ & & sE_{oc}-A_{oc} & * & -B_{oc} \\ & & & sE_{o\bar{c}}-A_{o\bar{c}} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & C_{oc} & C_{o\bar{c}} & 0 \end{array}\right) \qquad (10)$$

其中脚标 $o$，$\bar{o}$，$c$，$\bar{c}$ 分别表示 $C-$ 能观、不能观，$C-$ 能控，不能控，$*$ 表示可能非零的常值阵。

由此，我们得到改进的最小实现定理。

**定理 6**　非严格真有理分式阵 $H(s)$ 的实现是最小实现的充要条件是它 $C-$ 能控 $C-$ 能观。

证 必要性显然，否则由定理5知它可进一步解出$C$－能控$C$－能观部分，也是$H(s)$的实现，维数更小，矛盾。

**充分性** 设$(E, A, B, C)$是$H(s)$的一个实现，且$C$－能控$C$－能观，但不是最小实现。记$(E_1, A_1, B_1, C_1)$为最小实现，则$(E_1, A_1, B_1, C_1)$必$C$－能控$C$－能观。因$C$－能控$C$－能观隐含强能控强能观，由定理4知$(E, A, B, C)$与$(E_1, A_1, B_1, C_1)$受限强等价，这表明后者必然经过受限强等价运算及平凡压缩而由前者得到，即存在非奇异阵$M$，$N$使

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c} sE-A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} sE_1-A_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & I & 0 \\ \hline C_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{11}$$

由上式知

$$\operatorname{rank}(E, B) = \operatorname{rank}\left\{ M(E, B)\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E_1 & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < n \tag{12}$$

与系统$C$－能控矛盾，同理可证与$C$－能观也矛盾，故不存在比$(E, A, B, C)$维数更小的实现。 证毕。

**定理 7** 两个最小实现必是受限强等价的。

证 是定理4的直接推论。

上面通过广义系统受限强等价及其kalman形式分解建立了改进的最小实现定理6，事实上，由文[2]的结果及定理3也可得到定理6。前面的讨论也得到了如下改进的最小实现算法：

第一步：将$H(s)$以传递函数对偶$\overline{H}_D(s) = -\frac{1}{s}H\left(\frac{1}{s}-\mu\right)$（其中$\mu$满足$\det(\mu E+A)\neq 0$）实现为正常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ex + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{13}$$

第二步：利用Kalman分解求（13）的能控能观子系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= E_{oc}x_1 + B_{oc}u \\ y &= C_{oc}x_1 \end{aligned} \tag{14}$$

从而系统

$$\begin{aligned} E_{oc}\dot{x}_1 &= (I-\mu E_{oc})x_1 + B_{oc}u \\ y &= C_{oc}x_1 \end{aligned} \tag{15}$$

即为$H(s)$的最小实现。

## 参 考 文 献


〔1〕 Verghese, G. C., Levy, B. C., & Kailth, T., A Generalized State-space for Singular Systems, IEEE Trans., AC-26,4, (1981), 811—831.

〔2〕 Rosenbrock, H.H., Structural Properties of Linear Dynamical Systems, Int. J. Control, 20, 2, (1974), 191—202.

〔3〕 杨成梧、谭华林，广义系统的最小实现问题，控制理论与应用，5，1，（1988），72—77.

〔4〕 赵克友，奇异系统的一个实现方法，控制理论与应用，5，1，（1988），105—108.

〔5〕 Chen, C. T., Introduction to Linear System Theory, New York, Rinehart and Winston, (1970).


# Nondynamic Variables in Singular Systems


Yang Chengwu, Tan Hualin

(The Eighth Department, East China Institute of Technology, Nanjing)



**Abstract**

In this paper, a thorough investigation is made on the nondynamic variables, which exist only in singular systems, and their influence on the aspects of system equivalence, realization, controllability and observability. Some new insights and results are obtained.



**Key words**——Singular systems; Minimal realization; Controllability & observability.