第6卷 第4期 控制理论与应用 Vol.6, No.4
1989年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec., 1989

一种次最优鲁棒调节器的设计方法

倪茂林 刘淑贞

（北京控制工程研究所）（北京科技大学自动化系）

摘 要

本文基于最优控制和极点配置理论，提出一种灵敏度低、动特性好的次最优鲁棒调节器设计法。它具有计算方便、结构简单的特点。

关键词：鲁棒性；最优控制；调节器

一、问题提出

在线性最优调节器（LOR）设计中，总是假定控制对象参数是精确已知的。但由于辨识不精确或环境条件的影响，对象实际参数常偏离其标称值，因而按标称参数设计的控制系统可能失去最优性和期望的动态特性[1]。为此，在指标函数中加入灵敏度项，以降低反馈系统参数变化时的灵敏度[2]。然而，灵敏度的精确模型难以得到[3]，且计算量大[4]。本文首先提出一种灵敏度直接建模法，计算简单且近似性好，进而给出一种次最优鲁棒调节器的系统设计法。

二、灵敏度模型

1．引理[5] 考虑系统

$$\dot{\mathrm{x}} = A_0\mathrm{x} + B_0\mathrm{u} \tag{1}$$

其中 x 为 n 维状态向量；u 为 m 维控制向量；A_0、B_0 为适当维常数矩阵。设 (A_0B_0) 可控，权阵 $R>0$，取 ξ 为正实常数，则 Riccati 方程

$$P(A_0+\xi I)+(A_0'+\xi I)\ P-PB_0\ R^{-1}B_0'P=0 \tag{2}$$

存在半正定对称解（最大解）P_0，满足

$$R_e(s_i)\leqslant -\xi,\quad (s_i+\xi)^2=(\lambda_i+\xi)^2,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

其中 λ_i、$s_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别为系统（1）的开环和闭环特征值，反馈阵为 $k=R^{-1}B_0'P_0$。且控制律 $\mathrm{u}=-k\mathrm{x}$，在指标函数

$$J=\int_0^\infty(\mathrm{x}'Q_0\mathrm{x}+\mathrm{u}'R\mathrm{u})\mathrm{d}t,\quad Q_0=2\xi P_0$$

本文于1988年5月25日收到。1989年4月8日收到修改稿。

义下是最优的。

2．灵敏度模型的建立

考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u} \tag{4}$$

中 $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量；$\mathbf{u}$ 为m维控制向量；A、B均为可变参数 α 的函数矩阵。

为建立灵敏度模型，将（4）式对 α 求导，得

$$\dot{\sigma}=A\sigma+A_{\alpha}\mathbf{x}+B_{\alpha}\mathbf{u}+B\frac{\partial u}{\partial \alpha} \tag{5}$$

中 $\sigma=\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}$； $A_{\alpha}=\dfrac{\partial A}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha_0}$； $B_{\alpha}=\dfrac{\partial B}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha_0}$

称为参数 α 摄动时的轨迹灵敏度。

由于$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}$未知，为得到近似灵敏度模型，一般处理方法是忽略$\dfrac{\partial \sigma}{\partial \alpha}$项[2][3][4]。虑到LOR固有鲁棒性，为了得到较精确的灵敏度模型，这里反馈控制律先用 LOR来似。取

$$\mathbf{u}=-k\mathbf{x} \tag{6}$$

中，$k=R^{-1}B'P$，P为Riccati 方程

$$PA+A'P-PBR^{-1}B'P+Q=0 \tag{7}$$

半正定对称解。这里假定在参数 α 的变化范围内，（A，B）均能控。为使建立的灵度模型精确，且设计的系统动特性好，在标称参数下，根据系统的开环特征值适当选 ξ，利用引理求得Q_0，将（7）式中权阵Q取为Q_0。

（6）式对 α 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}=-k\sigma-k_{\alpha}\mathbf{x} \tag{8}$$

中

$$k_{\alpha}=\frac{\partial k}{\partial \alpha}=R^{-1}B'\Sigma+R^{-1}B'_{\alpha}P,\ \Sigma=\frac{\partial P}{\partial \alpha} \tag{9}$$

（7）式对 α 求导，得 Lyapunov 方程

$$\Sigma(A-BR^{-1}B'P)+(A-BR^{-1}B'P)'\Sigma+\widetilde{Q}=0 \tag{10}$$

中

$$\widetilde{Q}=PA_{\alpha}+A'_{\alpha}P-P(B_{\alpha}R^{-1}B'+BR^{-1}B'_{\alpha})P \tag{11}$$

将方程（10）的实对称解Σ代入（9）式，得 k_{α}，联立（5）、（8）式，可得近似敏度模型

$$\dot{\sigma}=(A_{\alpha}-Bk_{\alpha})\mathbf{x}+(A-Bk)\sigma+B_{\alpha}\mathbf{u} \tag{12}$$

三、次最优鲁棒调节器的设计及实现

按标称参数设计鲁棒调节器时，指标函数中加入灵敏度项，即为

$$J_1=\int_0^\infty(x'Q_1x+\sigma'Q_2\sigma+\overline{u}'R\overline{u})\,dt \tag{13}$$

它等价为

$$\overline{J}=\int_0^\infty(z'\overline{Q}z+\overline{u}'R\overline{u})\,dt \tag{14}$$

式中 $z=\begin{bmatrix}x\\ \sigma\end{bmatrix}$ 为增广系统状态向量

$$\overline{Q}=\mathrm{diag}[Q_1,Q_2]$$

这样鲁棒调节器可按增广系统的LOR设计。

由（4）（12）式，得增广系统模型（标称参数下）

$$\dot{z}=\overline{A}z+\overline{B}\overline{u}$$

其中 $z=\begin{bmatrix}x\\ \sigma\end{bmatrix}$，$\overline{A}=\begin{bmatrix}A & 0\\ A_\alpha-Bk_\alpha & A-Bk\end{bmatrix}_{\alpha_0}$，$\overline{B}=\begin{bmatrix}B\\ B_\alpha\end{bmatrix}_{\alpha_0}$

取（14）式中权阵 Q_1 为 Q_0，这样，（7）、（14）式中对应状态向量 x 的权阵相同，（6）式近似性好，灵敏度模型更精确。再适当选取权阵 Q_2和R，可得在（13）或（14）式指标函数 J_1 或 $\overline{J}$ 意义下的最优控制

$$\overline{u}=-\overline{k}z=-k_1x-k_2\sigma \tag{16}$$

为实现方便，仅取状态反馈，构成次最优调节器

$$u=-k_1x \tag{17}$$

次最优调节器结构简单，虽然抑制灵敏度的效果受到一定影响，但次最优控制律（17）是在指标函数中考虑了灵敏度项情况下获得的，因而次最优调节器比 LOR 仍具有更好的鲁棒性。这也可由下面的仿真结果进一步得到证实。

四、设计实例及仿真

某飞行器俯仰运动的状态方程为[6]

$$\dot{x}=A(\alpha)x+Bu \tag{18}$$

式中 $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ $A(\alpha)=\begin{bmatrix}A_{11} & 1 & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ 0 & 0 & -6.667\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 6.667\end{bmatrix}$

其中 $-0.074\leqslant A_{11}\leqslant-0.0016$ $\quad -0.012\leqslant A_{13}\leqslant-0.0002$

$-8.0\leqslant A_{21}\leqslant-0.1569$ $\quad -0.055\leqslant A_{22}\leqslant-0.0015$

$-6.2\leqslant A_{23}\leqslant-0.1131$

$$A(\alpha_0)=\begin{bmatrix}-0.0016 & 1 & -0.0002\\ -0.1569 & -0.0015 & -0.1131\\ 0 & 0 & -6.667\end{bmatrix}$$

$$A(\alpha_1)=\begin{bmatrix}-0.074 & 1 & -0.012\\ -8 & -0.055 & -6.2\\ 0 & 0 & -6.667\end{bmatrix}$$

偏导阵　$$A_\alpha=\begin{bmatrix}-0.018 & 0 & 0.0025\\ -1.7 & -0.011 & -1.3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad B_\alpha=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

1）标称参数($\alpha=\alpha_0$)下，取$\xi=0.2$，$R=1$，由引理得反馈阵

$$k=[-1.23\quad -7.22\quad 0.12] \tag{19}$$

比即权阵　$$Q_0=2\xi P_0=\begin{bmatrix}5.63 & 5.2 & -0.074\\ & 26.4 & -0.432\\ SYM & & 0.0072\end{bmatrix}\quad R=1 \tag{20}$$

意义下的LOR，其闭环响应曲线如图1所示。

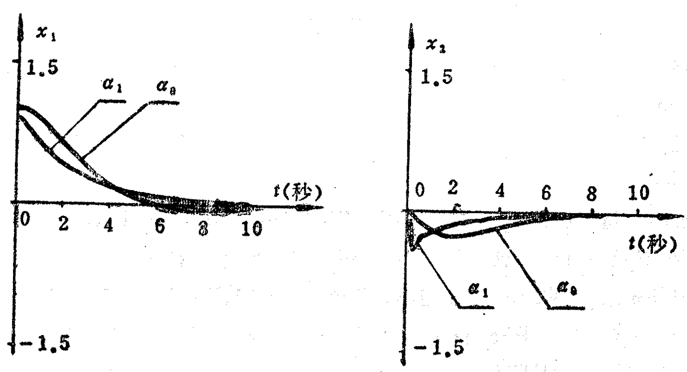

图 1　LOR系统响应$x(0)=[1\quad 0\quad 0]'$

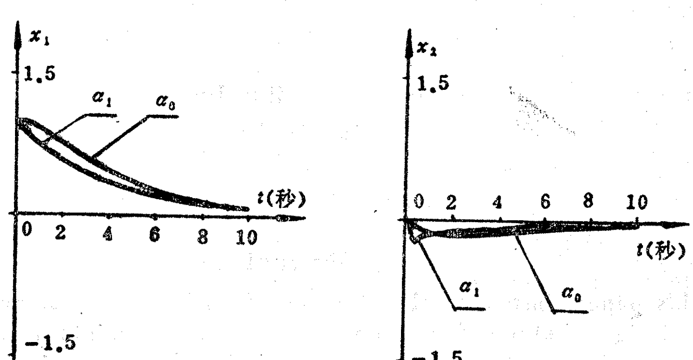

图 2　次最优鲁棒系统的响应$x(0)=[1\quad 0\quad 0]'$

2）取权阵

$$Q_1=Q_0,\ Q_2=\mathrm{diag}[10,\ 5,\ 0]$$

$$\overline{Q}=\mathrm{diag}[Q_1,\ Q_2]\quad R=1$$

按本文方法得次最优鲁棒调节器

$$u=-k_1x=[0.38,\ 11.15,\ -0.47]x$$

图2给出了次最优调节器的闭环响应曲线。

由图1、2可以看出，虽然次最优鲁棒控制系统的过渡过程时间比LQR系统的稍长，但在系统参数变化时，前者具有较好的鲁棒性。因此，设计者可在系统最优性和鲁棒性之间折衷，以得到满足最优性要求的鲁棒调节器。

本文给出的设计方法，可用于具有参数变化的各类鲁棒控制系统。

参考文献

〔1〕 Soroka, E. and U. Shaked, On the Robustness of LQ Regulators, IEEE Trans. Auto. Control, 29, 7,(1984), 664—665.

〔2〕 Kreindler, E., On Minimization of Trajectory Sensitivity, Int. J. Control, 8, 1,(1968), 89—96.

〔3〕 G. Rao, S. and A. C. Soudack, Synthesis of Optimal Control Systems with Near Sensitivity Feedback, IEEE Trans. Auto. Control, 16,(1971,4), 194—196.

〔4〕 Fleming, P. J. and M. M. Newmann, Design Algorithms for a Sensitivity Constrained Suboptimal Regulator, Int. J. Control, 25, 6,(1977), 965—978.

〔5〕 Amin, M. H. Optimal Pole Shifting for Continuous Multivariable Linear Systems, Int. J. Control, 41, 3,(1985), 701—707.

〔6〕 Krishnan, K. R. and S. Brzezowski, Design of Robust Linear Regulator with Prescribed Trajectory Insensitivity to Parameter Variations, IEEE Trans. Auto. Control, 23, 3,(1978), 474—478.

A Design Method for Suboptimal Robust Regulator

Ni Maolin

(Department of Intelligent Control, Beijing Institute of Control Engineering)

Liu Shuzhen

(Department of Automatic Control, Beijing University of Science and Technology)

Abstract

In this paper, based on the theories of optimal control and pole assignment, a design method for suboptimal robust regulators which have low sensitivity and good dynamical characteristics is proposed. Its computation is easy and the structure of the regulator is simple.

Key words——Robustness; Optimal control; Regulator.