第6卷　增刊1　　控制理论与应用　　Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jan., 1989

# 人口发展系统的最优控制*

于景元　郭宝珠　　　　朱广田
（北京信息控制研究所）　（中国科学院系统科学研究所）

**摘　要**

本文对连续人口发展模型讨论人口发展系统关于二次性能指标的最优控制，得到了相应的最大值原理。并由此得出时间最优控制所满足的必要条件。作为方法的应用。我们也对离散人口发展系统的最优控制进行了讨论，得到了与〔1〕同样的结果。

我们利用如下的人口发展的连续模型

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p(r,t)}{\partial t}+\frac{\partial p(r,t)}{\partial r}=-\mu(r)p(r,t)\quad 0<r<r_m,t>0,\\&p(r,0)=p_0(r),\qquad 0\leqslant r\leqslant r_m,\\&p(0,t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}R(r)h(r)p(r,t)dr,\qquad t>0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中，$p_0(r)$为初始人口年龄密度分布函数；$r_m$为社会人口所能活到的最高年龄；$R(r)$为女性比例函数，非负可测，且$0\leqslant R(r)\leqslant 1$；$h(r)$为妇女生育模式函数，非负可测，满足规格化条件

$$\int_{r_1}^{r_2}h(r)dr=1,\ h(r)=0,\ 当\ r\overline{\in}[r_1,\ r_2]时,$$

这里$[r_1,\ r_2]$为妇女育龄区间；$\beta(t)$表示妇女总和生育率，为人口控制中最直接有效的控制变量，非负可测；$\mu(r)$为相对死亡率函数，满足

$$\int_0^r\mu(\rho)d\rho<+\infty,\ r<r_m,$$

$$\int_0^{r_m}\mu(\rho)d\rho=+\infty,$$

$\mu(r)$非负可测。我们约定上述人口发展系统的参变量函数都定义在正实轴上，在负实轴上约定为零。

如果方程（1）存在解$p(r,t)$，假定$p_0(r)$连续，则对任何固定的$(r_0,t_0)\in[0,r_m]\times[0,\infty]$及$h\geqslant 0$，定义

$$\overline{p}(h)=p(r_0+h,\ t_0+h),\ \overline{\mu}(h)=\mu(r_0+h),$$

---

*中国科学院科学基金资助的课题。

本文于1986年4月7日收到。1988年5月3日收到修改稿。

则有

$$\frac{d\overline{p}(h)}{dh}=-\overline{\mu}(h)\,\overline{p}(h),$$

$$\overline{p}(0)=p(r_0,t_0). \tag{2}$$

方程（2）存在唯一连续解 $\overline{p}(h)=p(r_0,t_0)e^{-\int_0^h\overline{\mu}(\rho)d\rho}$，即

$$p(r_0+h,t_0+h)=p(r_0,t_0)\,e^{-\int_0^h\mu(r_0+\rho)d\rho}$$

令 $t_0=0$，$r_0=r-t$，$h=t$，则有

$$p(r,t)=p_0(r-t)e^{-\int_0^t\mu(r-t+\rho)d\rho}=p_0(r-t)\,e^{-\int_{r-t}^r\mu(\rho)d\rho},\quad r\geqslant t \tag{3}$$

令 $r_0=0$，$t_0=t-r$，$h=r$，则有

$$p(r,t)=p(0,t-r)\,e^{-\int_0^r\mu|\rho|d\rho},$$

$$=\beta(t-r)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)p(s,t-r)ds\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho},\quad r<t \tag{4}$$

结合（3）、（4），我们得到

$$p(r,t)=\begin{cases}p_0(r-t)\,e^{-\int_{r-t}^r\mu|\rho|d\rho}, & r\geqslant t\\ \beta(t-r)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)p(s,t-r)ds\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}, & r<t\end{cases} \tag{5}$$

（5）的解是唯一的，可以写作

$$p(r,t)=p_0(r-t)\,e^{-\int_{r-t}^r\mu(\rho)d\rho}+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t-r)\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}$$

其中，$\varphi_0(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)\,e^{-\int_0^s\mu(\rho)d\rho}\,p_0(s-t)ds,$

$$\varphi_k(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)\,e^{-\int_0^s\mu(\rho)d\rho}\,\varphi_{k-1}(t-s)ds\quad k=1,2,\cdots,$$

且 $\varphi_k(t)$只在$[kr,\ (k+1)r_2]$上才可能不为零．由此，如果 $p_0'(r)+\mu(r)p_0(r)\in L(0,r_m)$，$\beta(t)$连续可微，$\mu(r)$连续，容易证明，（5）的解就是方程（1）在古典意义下的解．

当 $p_0(r)$连续，$\beta(t)$分段连续时，方程（5）的解不一定为方程（1）的古典解，我们称方程（5）的解为方程（1）的 Mild 解．

下面我们来讨论方程（5）的最优控制问题．给定控制域

$$U=\{\beta(t)\,|\,0\leqslant\beta_0\leqslant\beta(t)\leqslant\beta_1,\ \beta(t)分段连续\} \tag{6}$$

及二次性能指标

$$J(\beta(\cdot))=\int_0^T\int_0^{r_m}[p(r,t,\beta(\cdot))-p^0(r,t)]^2 drdt+\alpha\int_0^T[\beta(t)-\beta^0(t)]^2dt\quad \alpha>0, \tag{7}$$

其中，$p^0(r,t)$为给定的固定区间$[0,r_m]\times[0,T]$上的连续人口状态，$\beta^0(t)$分段连续，$p(r,t,\beta(\cdot))$表示相应于$\beta(\cdot)\in U$的方程（5）的解。

设$\beta^*(t)$，$p^*(r,t)$为系统（5）相应于指标（7）在控制约束（6）下的最优控制状态。任取$\beta^*(t)$，$\beta^0(t)$的连续点$\hat{t}\in(0,T)$，作变分

$$\hat{\beta}(t)=\begin{cases}\beta^*(t) & t\overline{\in}(\hat{t}-\delta,\ \hat{t}+\delta),\ (2\delta<r_1),\\ \beta & t\in(\hat{t}-\delta,\hat{t}+\delta),\end{cases} \tag{8}$$

其中，$\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1$。于是$\hat{\beta}(t)\in U$。令$\hat{p}(r,t)=\hat{p}(r,t,\hat{\beta}(\cdot))=p^*(r,t)+\delta(r,t)$，则$\delta(r,t)$满足

$$\delta(r,t)=\begin{cases}0 & t-r\leqslant\hat{t}-\delta,\\ \Delta\beta(t-r)\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)p^*(s,t-r)ds\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho} & \hat{t}-\delta<t-r<\hat{t}+\delta,\\ \beta^*(t-r)\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)\delta(s,t-r)ds\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho} & t-r\geqslant\hat{t}+\delta,\end{cases}$$

其中，$\Delta\beta(t-r)=\hat{\beta}(t-r)-\beta^*(t-r)$。

设$R(r)$，$h(r)$都为连续函数，则当$t-r\geqslant\hat{t}+\delta$时

$$\delta(r,t)=\beta^*(t-r)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)\delta(s,t-r)ds\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}$$

$$=\beta^*(t-r)\int_{r_1}^{t-r-(\hat{t}+\delta)}R(s)h(s)\beta^*(t-r-s)\int_{r_1}^{r_2}R(z)h(z)\delta(z,t-r-s)dz$$

$$\cdot e^{-\int_0^s\mu(\rho)d\rho}ds\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}$$

$$+\beta^*(t-r)\int_{t-r-(\hat{t}+\delta)}^{r_2}R(s)h(s)\Delta\beta(t-r-s)$$

$$\cdot\int_{r_1}^{r_2}R(z)h(z)p^*(z,t-r-s)\,dz\,e^{-\int_0^s\mu(\rho)d\rho}ds\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho},$$

$$=2\delta\beta^*(t-r)\Delta\beta(\hat{t})R(t-r-\hat{t})h(t-r-\hat{t})\int_{r_1}^{r_2}R(z)h(z)p^*(z,\hat{t})dz$$

$$\cdot e^{-\int_0^{t-r-\hat{t}}\mu(\rho)d\rho}\cdot e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}+\beta^*(t-r)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)\beta^*(t-r-s)$$

$$\cdot\int_{r_1}^{r_2}R(z)h(z)\delta(z,t-r-s)dze^{-\int_0^s\mu(\rho)d\rho}dse^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}+0(\delta)(r,t),$$

其中，$0(\delta)=0(\delta)(r,t)$与$r$，$t$有关，$\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{|0(\delta)|}{\delta}=0$。

一般地，如果令

$$\overline{\varphi}_0(t)=\beta^*(t)R(t-\hat{t})h(t-\hat{t})\,e^{-\int_0^{t-\hat{t}}\mu(\rho)d\rho},$$

$$\overline{\varphi}_k(t)=\beta^*(t)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)\,e^{-\int_0^s\mu(\rho)d\rho}\,\overline{\varphi}_{k-1}(t-s)ds,\quad k=1,2,\cdots$$

$$\overline{\varphi}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\varphi}_k(t),$$

则当$t-r\geqslant\hat{t}+\delta$时

$$\delta(r,t)=2\delta\Delta\beta(\hat{t})\int_{r_1}^{r_2}R(z)h(z)p^*(z,\hat{t})dz\overline{\varphi}(t-r)\,e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}+0(\delta)(r,t)$$

由于$\beta^*(t)$及$p^*(r,t)$为最优控制及最优状态，于是由（7）

$$J(\hat{\beta}(\cdot))-J(\beta^*(\cdot))=2\int_0^T\int_0^{r_m}[p^*(r,t)-p^0(r,t)]\delta(r,t)drdt$$

$$+2\alpha\int_0^T[\beta^*(t)-\beta^0(t)]\Delta\beta(t)dt+\int_0^T\int_0^{r_m}\delta^2(r,t)drdt+\alpha\int_0^T\Delta\beta^2(t)dt\geqslant 0,$$

由$\delta(r,t)$，$\Delta\beta(t)$的任意性，有：

$$2\int_0^T\int_0^{r_m}[p^*(r,t)-p^0(r,t)]\delta(r,t)drdt+2\alpha\int_0^T[\beta^*(t)-\beta^0(t)]\Delta\beta(t)dt\geqslant 0,$$

即 $$\Delta\beta(\hat{t})\int_{r_1}^{r_2}R(z)h(z)p^*(z,\hat{t})\,dz\,\varphi(\hat{t})\geqslant 0,$$

其中，

$$\varphi(\hat{t})=\int_{\hat{t}}^T[p^*(t-\hat{t},t)-p^0(t-\hat{t},t)]\,e^{-\int_0^{t-\hat{t}}\mu(\rho)d\rho}dt$$

$$+\iint\limits_{t-r\geqslant\hat{t}}[p^*(r,t)-p^0(r,t)]\,\overline{\varphi}(t-r)e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}drdt$$

$$+\alpha[\beta^*(\hat{t})-\beta^0(\hat{t})].$$

令 $$H(t)=-\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)p^*(s,t)ds\,\varphi(t),$$

则有

$$\beta^*(t)H(t) = \max_{\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1} \beta H(t)$$

对任意使 $\beta^*(t),\beta^0(t)$ 连续的 $t\in(0,T)$。

引进 Dirac $\delta$函数 $\delta(r)$，则 $\varphi(\hat{t})$ 可以写为

$$\varphi(\hat{t}) = \int_0^{r_m}\int_0^T [p^*(r,t)-p^0(r,t)]e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}\delta(r-t+\hat{t})drdt$$

$$+\int_0^{r_m}\int_0^T [p^*(r,t)-p^0(r,t)]\overline{\varphi}(t-r)e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}drdt$$

$$+\alpha\int_0^T [\beta^*(t)-\beta^0(t)]\delta(t-\hat{t})dt.$$

设 $\psi(r,t)=\delta(r-t+\hat{t})e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}+\overline{\varphi}(t-r)e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}$，则$\psi(r,t)$满足

$$\psi(r,t)=\begin{cases}\delta(r-t+\hat{t})e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho} & r\geqslant t,\\ \beta^*(t-r)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)\psi(s,t-r)ds\, e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho} & r<t,\end{cases}$$

即 $\psi(r,t)$ 是共轭方程

$$\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}+\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r}=-\mu(r)\psi(r,t),$$

$$\psi(r,0)=\delta(r+\hat{t}), \tag{9}$$

$$\psi(0,t)=\beta^*(t)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)\psi(s,t)ds$$

在前面所述意义下的 Mild 解。

**定理 1**　二次指标最优控制满足极大值原理

$$\beta^*(\hat{t})[\langle p^*(r,t)-p^0(r,t),\psi(r,t,\hat{t})\rangle+\alpha\langle\beta^*(t)-\beta^0(t),\delta(t-\hat{t})\rangle]$$

$$=\max_{\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1}\beta[\langle p^*(r,t)-p^0(r,t),\psi(r,t,\hat{t})\rangle+\alpha\langle\beta(t)-\beta^0(t),\delta(t-\hat{t})\rangle], \tag{10}$$

其中，$\hat{t}$ 为 $\beta^*(t)$，$\beta^0(t)$ 的公共连续点，且 $\int_{r_1}^{r_2}R(z)h(z)p^*(z,\hat{t})dz\neq 0$。

显然，最优控制 $\beta^*(t)$ 满足

$$\beta^*(t)=\begin{cases}\beta_0 & \text{当 } H(t)<0 \text{ 时},\\ \beta_1 & \text{当 } H(t)>0 \text{ 时},\\ \text{不定} & \text{当 } H(t)=0 \text{ 时},\end{cases}$$

利用类似的方法，可以考虑方程(5)的时间最优控制问题。设容许控制集仍为$(b)$，终端集合为

$$V=\{p(r)\mid \|p(r)-p^*(r)\|_{L^2(0,r_m)}\leqslant M \quad p(r)\in L_2(0,r_m)\}, \tag{11}$$

这里，$p^*(r)=c_0 e^{-\int_0^r \mu(\rho)d\rho}$，$c_0>0$为任一指定的人口状态，我们已经证明[2]。

**定理 2** 如果初始人口状态分布$p_0(r)$满足

(1) $p_0'(r)+\mu(r)p_0(r)\in L^2(0,r_m)$,

(2) $\mathrm{mes}\{r\mid p_0(r)\neq 0 \quad r\in(0,r_2)\}\neq 0$,

则对任意的$\delta>0$，存在生育率$\beta(t)$及时刻$T>0$，$\beta_{cr}-\delta\leqslant\beta(t)\leqslant\beta_{cr}+\delta$，($\beta_{cr}$为临界妇女生育率)，$\beta(t)\in c^\infty_{(0,T)}$，使得$p(r,t)=p(r,t,\beta(\cdot))$有

$$\|p(r,T)-p^*(r)\|_{L^2(0,r_m)}<\varepsilon,$$

$\varepsilon$为预先给定的小正数。

设$\beta^*(t)$，$p^*(r,t)$为所述问题的时间最优控制及时间最优状态，$T^*$为最优时间，则[2]

$$\int_0^{r_m}[p^*(r)-p^*(r,T^*)]p^*(r,T^*)dr=\max_{\beta(t)\in U}\int_0^{r_m}[p^*(r)-p^*(r,T^*)]p(r,T^*)dr, \tag{12}$$

其中，$p(r,T^*)=p(r,T^*,\beta(\cdot))$。同样对于$\beta^*(t)$的任一连续点$\hat t\in(0,T)$，作变分

$$\hat\beta(t)=\begin{cases}\beta^*(t) & t\overline{\in}(\hat t-\delta,\ \hat t+\delta)\ (2\delta<r_1),\\ \beta & t\in(\hat t-\delta,\ \hat t+\delta),\end{cases}$$

$\hat\beta(t)\in U$，设$\hat p(r,t)=\hat p(r,t,\hat\beta(\cdot))=p^*(r,t)+\delta(r,t)$，则有

$$\Delta\beta(\hat t)\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)p^*(s,\hat t)ds\Big[[p^*(T^*-\hat t)-p^*(T^*-\hat t,T^*)]e^{-\int_0^{T^*-\hat t}\mu(\rho)d\rho}$$
$$+\int_0^{T^*-\hat t}[p^*(r)-p^*(r,T^*)]\overline{\varphi}(T^*-r)e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}dr\Big]\leqslant 0.$$

若$\int_{r_1}^{r_2}R(s)h(s)p^*(s,\hat t)ds\neq 0$，则

$$\Delta\beta(\hat t)[p^*(T^*-\hat t)-p^*(T^*-\hat t,T^*)]e^{-\int_0^{T^*-\hat t}\mu(\rho)d\rho}$$
$$+\int_0^{T^*-\hat t}[p^*(r)-p^*(r,T^*)]\overline{\varphi}(T^*-r)e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}dr\leqslant 0,$$

即

$$\Delta\beta(\hat{t})\left[\int_0^{T^*-\hat{t}}[p^*(r)-p^*(r,T^*)][\delta(r-T^*+\hat{t})+\overline{\varphi}(T^*-r)]e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}\right]dr\leqslant 0$$

或者用（9）的记号，有

$$\Delta\beta(\hat{t})\int_0^{T^*-\hat{t}}[p^*(r)-p^*(r,T^*)]\phi(r,T^*)dr\leqslant 0.$$

**定理 3** 在前面所述条件下，时间最优控制 $\beta^*(t)$ 满足如下的最大值原理

$$\beta^*(\hat{t})\int_0^{T^*-\hat{t}}[p^*(r)-p^*(r,T^*)]\phi(r,T^*)dr$$

$$=\max_{\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1}\beta\cdot\int_0^{T^*-\hat{t}}[p^*(r)-p^*(r,T^*)]\phi(r,T^*)dr,$$

其中，$\phi(r,t)$ 为方程（9）的 Mild 解，$\hat{t}$ 为 $\beta^*(t)$ 的连续点。

作为方法上的应用，我们来考虑离散人口模型的最优控制

$$x(t+1)=[A(t)+\beta(t)B(t)]x(t),\qquad(13)$$
$$x(0)=x_0.$$

设 $x^0(t)$ 为给定的理想人口状态，性能指标为

$$J(\beta(\cdot))=\sum_{t=0}^{T-1}\langle x(t)-x^0(t),x(t)-x^0(t)\rangle,\qquad(14)$$

这里，$x(t)=(x_1(t)\cdots x_{r_m}(t))^T$ 为人口状态向量，

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & & & 0\\ 1-\mu_1(t) & 0 & & & 0\\ & 1-\mu_2(t) & & & \vdots\\ & & \ddots & & \vdots\\ \text{\Large 0} & & & 1-\mu_{r_m}(t) & 0\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}0\cdots0\ b_{r_1}(t)\cdots b_{r_m}(t)\ 0\cdots0\\ \text{\Large 0}\end{pmatrix}$$

$t=0,1,2\cdots$ 取正整数值，$T>0$ 为给定的时刻，指标（14）为离散人口模型（13）的二次性能指标。所谓最优控制，即是寻求生育率 $\beta^*(t)$，$\beta_0\leqslant\beta^*(t)\leqslant\beta_1$，使得

$$J(\beta^*(\cdot))=\min_{\beta(\cdot)\in U}J(\beta(\cdot)),\qquad(15)$$

$$U=\{\beta(t)\mid 0\leqslant\beta_0\leqslant\beta(t)\leqslant\beta_1,\ t=0,1,2,\cdots\}.\qquad(16)$$

设 $\beta^*(t)$，$x^*(t)$ 为相应于（15）的最优控制及最优状态，任取 $t_j$：$1\leqslant t_j\leqslant T$，作控制变分

$$\hat{\beta}(t)=\begin{cases}\beta^*(t) & t\neq t_j-1,\\ \beta & t=t_j-1,\end{cases}$$

$\hat{\beta}(t)\in U$。设 $\hat{x}(t)=\hat{x}(t,\hat{\beta}(\cdot))=x^*(t)+\delta x(t)$，$\delta x(t)$ 满足

$$\delta x(t+1)=[A(t)+\beta^*(t)B(t)]\delta x(t)\quad t\geqslant t_j,$$
$$\delta x(t_j)=\Delta\beta(t_j-1)B(t_j-1)x^*(t_j-1),$$
$$\delta x(t)=0\quad t<t_j.$$

令 $y(t)=\alpha\hat{x}(t)+(1-\alpha)x^*(t)=\alpha\delta x(t)+x^*(t)\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$

当 $\sum_{i=r_1}^{r_2}[\alpha b_i\hat{x}_i(t)+(1-\alpha)b_i x_i^*(t)]\neq 0$ 时，令

$$\beta(t)=\left[\hat{\beta}(t)\sum_{i=r_1}^{r_2}\alpha\hat{x}_i(t)+\beta^*(t)\sum_{i=r_1}^{r_2}(1-\alpha)x_i^*(t)\right]\bigg/\sum_{i=r_1}^{r_2}$$
$$\cdot[\alpha b_i\hat{x}_i(t)+(1-\alpha)b_i x_i^*(t)],$$

否则任意而使 $\beta(t)\in U$，则 $y(t)=y(t,\beta(\cdot))$，从而由 $J(\beta(t)\geqslant J(\beta^*(t))$，得

$$\sum_{t=0}^{T-1}\langle\delta x(t),\ x^*(t)-x^0(t)\rangle\geqslant 0,$$

或者

$$\sum_{t=t_j}^{T-1}\langle\delta x(t),\ x^0(t)-x^*(t)\rangle\leqslant 0,$$

而 $\delta x(t)=\prod_{i=t_j}^{t-1}[A(i)+\beta^*(i)B(i)]\Delta\beta(t_j-1)B(t_j-1)x^*(t_j-1)$，于是

令 $\phi(t_j)=\sum_{t=t_j}^{T-1}\prod_{i=t_j}^{t-1}[A^T(i)+\beta^*(i)B^T(i)](x^0(t)-x^*(t))$，则

$$\phi(t_j)=[A^T(t_j)+\beta^*(t_j)B^T(t_j)]\phi(t_j+1)+x_0(t_j)-x^*(t_j).$$

若令 $\phi_0(t)=-1$，$\tilde{\phi}(t)=(\phi_0(t),\ \phi(t))^T$，

$$\tilde{A}(t)=\begin{pmatrix}1 & x^*(t)-x_0(t)\\ 0 & A(t)+\beta^*(t)B(t)\end{pmatrix},$$

则

$$\tilde{\phi}(t)=\tilde{A}^T(t)\tilde{\phi}(t+1).\tag{17}$$

综上所述，我们得到

**定理 4** 离散人口方程（13）关于二次性能指标（14）的最优控制状态 $\beta^*(t)$，$x^*(t)$，满足最大值原理

$$\langle\beta^*(t-1)B(t-1)x^*(t-1),\ \phi(t)\rangle=\max_{\beta_0\leqslant\beta\leqslant\beta_1}\langle\beta B(t-1)x^*(t-1),\ \phi(t)\rangle,$$

其中，$\phi(t)$ 为共轭方程（17）的解。

由定理4，

$$\beta^*(t-1)=\begin{cases}\beta_0 & \text{当}\langle B(t-1)x^*(t-1),\ \phi(t)\rangle>0,\\ \beta_1 & \text{当}\langle B(t-1)x^*(t-1),\ \phi(t)\rangle<0,\\ \text{不定} & \text{当}\langle B(t-1)x^*(t-1),\ \phi(t)\rangle=0.\end{cases} \tag{18}$$

这与〔1〕所得结果完全一致.

## 参 考 文 献


〔1〕 宋健、于景元，人口控制论，科学出版社，北京，（1985）.

〔2〕 于景元、郭宝珠、朱广田，人口控制系统对定态分布状态的近似可控性及时间最优控制，科学通报，5，（1987），321—325.


# Optimal Control of Population System


Yu Jingyuan, Guo Baozhu

(Beijing Institute of Information and Control)

Zhu Guangtian

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)



## Abstract

In this paper, we discuss the optimal control with regard to quadratic performance index of population evolution system described by continuous mathematical model, and get relevant maximal principle. Meanwhile, the necessary condition which must be satisfied for time optimal control is derived as a consequence. Finally, as an application of method, we also discuss same optimal control problem for discrete population evolution system, and get the same results as that of reference 〔1〕.