第6卷 增刊1
1989年1月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.6 Suppl.I. 1
Jan., 1989

# 离散时间线性多变量系统的持久激励性

陶永林 陈禹年

（上海第二工业大学工业自动化系）

**摘 要**

对于离散时间线性多变量系统，如果输入向量满足文中给出的条件，就能保证回归向量的持久激励。另外指出，采用通常的伪随机二进制序列作为输入能满足这个条件。

## 一、前 言

文献〔1〕指出，对于离散时间线性系统，如果回归向量持久激励，那末通常的递推最小二乘参数估计是收敛的；具有协方差复位的最小二乘估计则是指数收敛的。文献〔2〕和〔3〕分别对单变量自适应控制系统的各自情形，给出了使回归向量持久激励的系统输入信号应满足的条件。本文对于一般的离散时间线性多变量系统研究了这方面的问题。至于多变量自适应系统的情形，则另文讨论。

## 二、回归向量的持久激励性

设离散时间线性多变量系统由如下的方程组描述

$$u(t)=P_R(z)w(t), \tag{1}$$

$$y(t)=R(z)w(t), \tag{2}$$

其中 $u(t)$为系统的$m$维输入向量，$y(t)$为系统的$p$维输出向量，$w(t)$为系统的$m$维部分状态向量，$z$为前移算子，即$zw(t)=w(z+1)$，$P_R(z)$与$R(z)$为多项式矩阵。

这里假定

（$A1$）$R_R(z)$是列既约的（Column Proper），

$$(A2)\ \mu_j=\partial c_j[P_R(z)]\geqslant \partial c_j[R(z)], \tag{3}$$

其中 $\partial c_j[\cdot]$记多项式矩阵第$j$列的列次数，即第$j$列的最高次数；

（$A3$）$P_R(z)$与$R(z)$右互质。

由$(A_1)$和$(A_2)$知，有理分式阵$T(z)=R(z)P_R^{-1}(z)$是真的。系统（1）、（2）的另一种对偶描述形式为

$$P_L(z)y(t)=Q(z)u(t), \tag{4}$$

其中 $P_L(z)$有如下的形状（参考文献〔4〕的定理3）

$$P_L(z)=\mathrm{diag}\{z^{\nu_1},z^{\nu_2},\cdots,z^{\nu_p}\}+\text{列次数小于}\nu_i\text{的低次项} \tag{5}$$

本文于1986年5月20日收到。1986年10月20日收到修改稿。

且$P_L(z)$与$Q(z)$左互质。

因为$P_L(z)$是行既约的，所以$T(z)$是真的等价于

$$\partial_{r,i}[Q(z)]\leqslant\partial_{r,i}[P_L(z)]=\nu_i, \qquad (i=1,2,\cdots,p) \tag{6}$$

如果$\nu_i(i=1,2,\cdots,p)$已知，那末可利用下式来进行参数估计

$$\mathrm{diag}\{z^{\nu_1}, z^{\nu_2}, \cdots, z^{\nu_p}\}y(t-\nu)=-[P_L(z)-\mathrm{diag}\{z^{\nu_1}, z^{\nu_2},\cdots, z^{\nu_p}\}]\cdot y(t-\nu)+Q(z)u(t-\nu), \tag{7}$$

其中 $\nu\triangleq\max\limits_i \nu_i$。

依据（7），定义回归向量$\phi(t)$如下：

$$\phi(t)\triangleq[y_1(t+\nu_1-\nu-1), \cdots, y_1(t-\nu);\cdots; y_p(t+\nu_p-\nu-1)\cdots, y_p(t-\nu); u_1(t), \cdots, u_1(t-\nu); \cdots; u_m(t), \cdots, u_m(t-\nu)]^T, \tag{8}$$

这里，$y_i(t)$与$u_i(t)$分别表示$y(t)$与$u(t)$的第$i$个分量。可以看出，$\phi(t)$是一个$n+m(\nu+1)$维向量序列，其中$n\triangleq\sum\limits_{i=1}^{p}\nu_i=\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j$。

**定义** 称$\phi(t)$为持久激励的，如果存在正整数$L$与$N$以及正数$\varepsilon$，使得当$t_0\geqslant N$时

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+L-1}\phi(t)\phi^T(t)\geqslant\varepsilon I_{n+m(\nu+1)}. \tag{9}$$

设$\alpha$为任一$n+m(\nu+1)$维单位向量，并记

$$S_1(z)=\begin{pmatrix} z^{\nu_1-1},\cdots,z,1,0,\cdots,0,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0,0 \\ 0,\cdots,0,0,z^{\nu_2-1},\cdots,z,1,0,\cdots,0,0,\cdots,0,0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 0,\cdots,0,0,0,\cdots,0,0,0,\cdots,0,z^{\nu_p-1},\cdots,z,1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$S_2(z)=\begin{pmatrix} z^{\nu}, \cdots, z, 1,0,\cdots,0,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0,0 \\ 0, \cdots,0,0,z^{\nu-1},\cdots,z,1,0,\cdots,0,0,\cdots,0,0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 0, \cdots,0,0,0,\cdots,0,0,0,\cdots,0,z^{\nu-1},\cdots,z,1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$S(z)=\begin{pmatrix} S_1(z) & 0 \\ 0 & S_2(z)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\alpha(z)=S(z)\alpha, \tag{13}$$

令$e_\alpha(t)\triangleq\alpha^T\phi(t)$利用（8）、（10）～（13）以及系统方程（1）与（2），有

$$e_\alpha(t)=\alpha(z)^T\begin{pmatrix} R(z) \\ P_R(z)\end{pmatrix}w(t-\nu), \tag{14}$$

利用$e_\alpha(t)$的表达式，（9）等价地可表为

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+L-1} e_\alpha^2(t)\geqslant\varepsilon, \tag{15}$$

对$t_0 \geqslant N$及一切$\alpha(\|\alpha\|=1)$成立，其中$\|\cdot\|$表示通常的欧几里德范数。

## 三、回归向量持久激励的条件

现在我们来考察输入向量$u(t)$应满足的条件以保证回归向量$\phi(t)$的持久激励性。

**定理 1**　设多变量系统由（1）与（2）所描述，而且多项式矩阵对$\{P_R(z),\ R(z)\}$满足假设（$A1$）～（$A3$）；又设回归向量$\phi(t)$由（8）所定义．记

$$U(t) \triangleq [u^T(t),\ u^T(t-1),\ \cdots,\ u^T(t-n-\nu)]^T, \qquad (16)$$

$$\sigma(t_0, L) \triangleq \lambda_{\min}\left\{\sum_{t=t_0+n}^{t_0+L-1} U(t)U^T(t)\right\}, \qquad (17)$$

其中$\lambda_{\min}\{\cdot\}$表示矩阵“$\cdot$”的最小特征值，$n$为系统最小实现的维数。则存在正数$K$，它与$t_0$的取值无关，使得

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+L-1}\phi(t)\phi^T(t) \geqslant K\sigma(t_0,\ l)I_{n+m(\nu+1)}. \qquad (18)$$

为了证明定理1，需要下面两个引理。

**引理 1**　设$\alpha(z)$由（13）所定义，$\{P_R(z),\ R(z)\}$满足假设条件（$A1$）～（$A3$）．记

$$\gamma_\alpha^T(z) \triangleq \alpha^T(z)\begin{pmatrix} R(z) \\ P_R(z) \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

那末，必有

$$\inf_{\|\alpha\|=1}\|\gamma_\alpha(z)\| > 0. \qquad (20)$$

**引理 2**　设$\gamma(z)$为任一$m$维多项式向量，满足条件$\|\gamma(z)\| \geqslant K_1 > 0$，这里$K_1$为某一正数。又设$P_R(z)$为$m\times m$非奇异阵。则必存在一个多项式向量$\delta_\gamma(z)$，使得

$$[\det P_R(z)]\gamma^T(z) = \delta_\gamma^T(z)P_R(z) \qquad (21)$$

且

$$\|\delta_\gamma(z)\| \geqslant K_2 > 0, \qquad (22)$$

其中正数$K_2$仅依赖于$K_1$与$P_R(z)$。

以上二引理的证明可参见附录。

现在来证明定理1。

设$\alpha(z)$由（13）所定义，又由（19）规定$\gamma_\alpha(z)$，那末，根据引理1，必有正数$K_1$，它不依赖于单位向量$\alpha$中各元素的具体选择，使得$\|\gamma_\alpha(z)\| \geqslant K_1$。再根据引理2，必存在多项式向量$\delta_\gamma(z)$，使得

$$[\det P_R(z)]\gamma_\alpha^T(z) = \delta_\gamma^T(z)P_R(z) \qquad (23)$$

且有正数$K_2$（它不依赖于$\gamma_\alpha(z)$中各多项式系数的具体数值，因而不依赖于单位向量$\alpha$中各元素的具体取值）适合（22）。

由（14）与（19）有

$$e_a(t-n)=\gamma_a(z)w(t-n-\nu). \tag{24}$$

将（24）两边乘以$\det P_R(z)$，并利用（23）和（1），有

$$\begin{aligned}[\det P_R(z)]e_a(t-n) &= \delta_\gamma^T(z)P_R(z)w(t-n-\gamma) \\ &= \delta_\gamma^T(z)u(t-n-\gamma).\end{aligned} \tag{25}$$

下面估计$\delta_\gamma(z)$中各元素的次数．由（23）与（19）可得

$$\begin{aligned}\delta_\gamma^T(z) &= [\det P_R(z)]\gamma_a^T(z)P_R^{-1}(z) \\ &= \alpha(z)^T\begin{pmatrix} R(z)[\mathrm{Adj}P_R(z)] \\ \det P_R(z)\cdot I_m\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{26}$$

因为$T(z)=R(z)P_R^{-1}(z)$是真的，故有

$$R(z)[\mathrm{Adj}P_R(z)]\text{任一元素的次数}\leqslant\partial[\det P_R(z)]=n\partial \tag{27}$$

由（26）和（27）知，

$$\partial c_j[\delta_\gamma^T(z)]\leqslant\max_j\{\partial c_j[\alpha^T(z)\}+n=n+\nu. \tag{28}$$

将（25）两边平方后求和，可得

$$\sum_{t=t_0+n}^{t_0+L-1}[\delta_\gamma^T(z)u(t-n-\nu)]^2=\sum_{t=t_0+n}^{t_0+L-1}\{[\det P_R(z)]e_a(t-n)\}^2 \tag{29}$$

由（16），（17），（22）、（27）、（28）与（29），可得

$$\begin{aligned}K_2^2\,\sigma(t_0,\ l) &\leqslant \sum_{t=t_0+n}^{t_0+L-1}[\delta_\gamma^T(z)u(t-n-\nu)]^2 \\ &= \sum_{t=t_0+n}^{t_0+L-1}\{[\det P_R(z)]e_a(t-n)\}^2 \\ &\leqslant \sum_{t=t_0+n}^{t_0+L-1}\|\det P_R(z)\|^2\cdot\sum_{i=0}^{n}e_a^2(t+i-n)\ (\text{由许瓦兹不等式}) \\ &\leqslant (n+1)\|\det P_R(z)\|^2\cdot\sum_{t=t_0}^{t_0L+-1}e_a^2(t).\end{aligned} \tag{30}$$

记

$$K\triangleq\frac{K_2^2}{(n+1)\|\det P_R(z)\|^2},$$

则（30）可改写为

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+L-1}e_a^2(t)\geqslant K\sigma(t_0,\ l), \tag{31}$$

且$K$仅取决于$P_R(z)$与$R(z)$中的参数．由$\alpha$的任意性可知（18）成立．

**定理 2**　设定理1的条件成立，$\sigma(t_0,L)$由（16）与（17）所定义．如果存在正整数$L$与$N$，以及正数$\sigma$，使得当$t_0\geqslant N$时

$$\sigma(t_0,\ L)\geqslant\sigma, \tag{32}$$

那末，必存在正数$\varepsilon$，使得当$t_0\geqslant N$时

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+L-1}\phi(t)\phi^T(t)\geqslant\varepsilon In+m(\nu+1), \tag{33}$$

亦即，$\phi(t)$是持久激励的。

证　取$\varepsilon=K\sigma$，并利用（18）即得证。

## 四、随伪机二进制序列的持久激励性

设 $a(t)$，$t=0$，1，2，…为一取值0或1的伪随机二进制序列，其周期为$L$。又设$\sigma$是加群$\{0,\ 1\}$到乘群$\{1,\ -1\}$上的一个同构．定义序列$\nu(t)\triangleq A\sigma[a(t)]$，其中$A$为正常数．由[6]可得，对任意的$t_0$，当$|i-j|<L$时，有

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+L-1}\nu(t-i)\nu(t-j)=\begin{cases}A^2L, & i=j\\ -A^2, & i\neq j\end{cases} \tag{34}$$

记

$$u_i(t)\triangleq\nu[t-(i-1)l],\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m, \tag{35}$$

$$u(t)\triangleq[u_1(t),\ u_2(t),\ \cdots,\ u_m(t)]^T, \tag{36}$$

$$U(t)\triangleq[u^T(t),\ u^T(t-1),\ \cdots,\ u^T(t-s+1)]^T, \tag{37}$$

这里$m$，$l$与$s$为正整数．考察矩阵

$$\Sigma(t_0)\triangleq\sum_{t=t_0}^{t_0+L-1}U(t)U^T(t), \tag{38}$$

利用（34），容易证明

**定理 3**　设$U(t)$由（35）～（37）构成，其中$L$、$m$、$l$与$s$满足下列条件

$$s\leqslant l<\frac{L+1-s}{m-1}, \tag{39}$$

$$L\geqslant ms. \tag{40}$$

那末，对任意$t_0$，有

$$\Sigma(t_0)\geqslant A^2(L+1-ms)I_{ms}\geqslant A^2I_{ms}. \tag{41}$$

## 五、结　　语

本文对离散时间线性多变量系统，给出了保证回归向量持久激励的条件，而且在形式上比文献[2]和[3]对单变量系统给出的要来得好．另外，通常的伪随机二进制序列满足这个条件．

## 附　录　　引理1与引理2的证明

设 $a(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 为 $z$ 的标量多项式，$A(z)=(a_{ij}(z))$为$z$的多项式矩

阵。

记 $a=(a_0, a_1, \cdots, a_n)^T$,

$$\|a(z)\|=\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|a\|,$$

$$\|A(z)\|=\left(\sum_{ij}\|a_{ij}(z)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

容易证明$\|\cdot\|$是一种范数，且有下列性质：

$$(\text{i})\ \|A(z)B(z)\|\leqslant K\|A(z)\|\cdot\|B(t)\|, \tag{A.1}$$

其中 $K\triangleq[1+\min(\partial A(z), \partial B(z))]^{\frac{1}{2}}$，$\partial A(z)$为$A(z)$中元素的最高次数；

$$(\text{ii})\ \|\beta(z)A(z)\|\geqslant K_\beta\|A(z)\|, \tag{A.2}$$

其中 $K_\beta$是一个仅与多项式$\beta(z)$有关的常数。

引理1的证明：

首先，我们断言，对任一单位向量$\alpha$，$\gamma_\alpha(z)\neq 0$。若不然，因为$(P_L(z), -Q(z)$是$\begin{pmatrix}R(z)\\P_R(z)\end{pmatrix}$零空间的最小互素基[5]，由(19)及$\gamma_\alpha(z)=0$(对于某个$\alpha$)知，$\alpha^T(z)\triangleq(\alpha^{(1)}(z)^T, \alpha^{(2)}(z)^T)$是该空间的一个元素。因此，存在一个多项式向量$\beta(z)$，使得

$$\alpha^{(1)}(z)^T=\beta^T(z)P_L(z), \tag{A.3}$$

$$\alpha^{(2)}(z)^T=-\beta^T(z)Q(z). \tag{A.4}$$

由($A3$)可得

$$\beta^T(z)=\alpha^{(1)}(z)^T P_L^{-1}(z) \tag{A.5}$$

因为$\nu_j-1=\partial c_j[\alpha^{(1)}(z)^T]<\partial c_j[P_L(z)]=\nu_j(j=1, 2,\cdots,p)$以及$P_L(z)$行既约，故($A.5$)的右边是严格真的有理分式向量，而左边为多项式向量，因此，必有$\alpha^{(1)}(z)=0$, $\beta(z)=0$。再由($A.4$)得知，$\alpha^{(2)}(z)=0$，从而$\alpha(z)=0$，即$\alpha=0$，这与$\alpha$为单位向量的假设矛盾。又$\|\gamma_2(z)\|$是$\alpha$的连续函数，故$\|\gamma_\alpha(z)\|$在有界闭集$\|\alpha\|=1$上达到它的下确界，于是引理1得证。

引理2的证明：

记

$$\delta_\gamma^T(z)\triangleq\gamma^T(z)[\mathrm{Adj}P_R(z)], \tag{A.6}$$

则 $\delta_\gamma^T(z)=[\det P_R(z)]\gamma^T(z)P_R^{-1}(z)$，在上式两边右乘$P_R(z)$即得(21)。由性质(i)与(ii)可得

$$K_P\|\gamma(z)\|\leqslant\|\det P_R(z)\cdot\gamma^T(z)\|=\|\delta_\gamma^T(z)P_R(z)\|\leqslant K\|\delta_\gamma^T(z)\|\cdot\|P_R(z)\|, \tag{A.7}$$

其中 $K=[1+\partial P_R(z)]^{\frac{1}{2}}$，$K_p$为仅依赖于$\det P_R(z)$的某一正数。由($A.7$)与假设条件$\|\gamma(z)\|\geqslant K_1>0$可得$\|\delta_\gamma(z)\|\geqslant K_2$，其中$K_2=\dfrac{K_pK_1}{K\|P_R(z)\|}$。

## 参 考 文 献


〔1〕 Goodwin, G. C., Norton, J. P. and Viswanathan, M. N., Persistency of Excitation for Nonminimal Models of Systems Having Purel yDeterministic Disturbances, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-30:6 (1985), 589-592.

〔2〕 Goodwin, G.C. and Teoh, E.K., Persistency of Excitation in the Presence of Possibly Unbounded Signals, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-30:6, (1985), 595-597.

〔3〕 Elliott, H., Crist, R. and Das, M., Global Stability of Adaptive Pole Placement Algorithms, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-30:4 (1985), 348-356.

〔4〕 Wolovich, W. A. and Antsaklis, P. J., The Canonical Diophantine Equations with Applications, SIAM J. Contr. 22:5, (1984), 777-787.

〔5〕 Forney, G. D. Jr., Minimal Basis of Rational Vector Spaces with Applications to Multivariable Linear Systems, SIAM J. Contr. 13:3 (1975), 493-520.

〔6〕 万哲先著，代数和编码，科学出版社，北京，（1985），274-276.


# Persistency of Excitation for Discrete-time Linear Multivariable Systems


Tao Yonglin, Chen Yunian

(Department of Automation, Shanghai Second Polytechnic University)


### Abstract


This paper gives a condition satisfied by the input vector for discrete-time linear multivariable systems, which guarantees persistency of excitation of the regression vector, and also proves that the usual pseudo-random binary sequence (PRBS) satisfies this condition